Licence de Mathématiques

2023-2024

Intitulé de l'enseignement: Théorie des Probabilités

Année: L3

Date: 17 mai 2024

Examen- Contrôle terminal

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Vrai/Faux) **:** Pour chacune de ces assertions, préciser si elle est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est vraie, vous devez le démontrer, lorsqu'elle est fausse, vous devez donner un contre-exemple.

▷ **1)** Deux événements incompatibles sont indépendants.

▷ **2)** Deux événements indépendants sont incompatibles.

▷ **3)** Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, alors $A = B^c$.

▷ **4)** Si A et B sont deux événements indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

▷ **5)** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux systèmes complets d'événements. Alors $(A_n \cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événement.

Exercice 2 : Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et si elles admettent une espérance.

1. $f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ **2.** $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

3. $f_3(x) = \sin x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Deux piles consécutifs) **:** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtiendra une infinité de fois deux piles consécutifs.

Exercice 4 (Produit de lois de Pareto) **:** On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ si,

$$\forall x \geq 1,\ P(X > x) = x^{-\alpha}.$$

▷ **1)** Démontrer que cette propriété caractérise effectivement la loi de X. Montrer que X suit une loi à densité, et préciser cette densité.

▷ **2)** Pour quelles valeurs de α la variable X est-elle d'espérance finie?

▷ **3)** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Pareto de paramètre α. Montrer que, si $t \geq 1$, alors

$$P(XY > t) = \int_1^{+\infty} P\left(X > \frac{t}{y}\right) dP_Y(y).$$

▷ **4)** En déduire que, pour tout $t \geq 1$, $P(XY > t) = t^{-\alpha}(1 + \alpha \ln t)$.

Exercice 5 (Une suite de variables aléatoires) : Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2 x^2/2).$$

▷ **1)** Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.

▷ **2)** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X que l'on précisera.

Exercice 6 (Racines de polynômes) : On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

▷ **1)** Q ait deux racines réelles distinctes.

▷ **2)** Q ait une racine réelle double.

▷ **3)** Q n'ait pas de racines réelles.

Problème : Les neurophysiologistes sont aujourd'hui capables d'enregistrer simultanément l'activité de plusieurs neurones. À partir de ces enregistrements, des méthodes probabilistes et statistiques permettent de détecter les moments où les neurones se synchronisent. Les neurones sont des cellules qui communiquent entre elles en émettant des signaux électriques appelés potentiels d'action. Une fois émis, ces signaux voyagent le long de l'axone pour arriver aux synapses où ils se transmettent au neurone voisin. Le neurone récepteur cumule les informations obtenues de ses neurones voisins et émet à son tour un potentiel d'action si la quantité d'information reçue est suffisante. Les signaux reçus s'atténuant dans le temps, deux stratégies sont possibles pour transmettre un signal:

- les signaux reçus sont émis à une haute fréquence, le rythme de leurs arrivées est élevé,
- les signaux reçus sont synchronisés, ils arrivent tous en même temps au neurone récepteur.

La deuxième solution est plus rapide et moins coûteuse en énergie. Les neurophysiologistes ont observé que le régime « synchronisation » apparaît à des moments précis d'une tâche dans certaines zones précises du cerveau. Le principal problème est que les neurophysiologistes n'ont accès qu'à une information très partielle sur l'activité des neurones. Grâce à des électrodes implantées dans le cerveau, ils peuvent enregistrer les temps d'émissions de potentiels d'actions (ces temps sont aussi appelés « *spikes* ») de deux neurones (ou plus) simultanément. Ils n'ont par contre pas accès au potentiel électrique de membrane de chacun des deux neurones. L'enregistrement est coupé en petites plages de temps. Le but est de décider si il y a ou non synchronisation sur une plage de temps fixée.

Nous modélisons les trains de *spikes* de la manière suivante : le résultat de chaque case (0 ou 1) est modélisée par une loi de Bernoulli. L'observation d'un train de spikes sur une durée peut être vue comme un ensemble de n résultats de lancer de pièce truquée. Comme il y a deux trains de *spikes*, c'est comme si nous avions deux suites de n résultats de lancer de deux pièces. Leurs paramètres sont notés p_1 pour le neurone 1 et p_2 pour le neurone 2. On dit qu'il y a coïncidence à l'instant t si à cet instant, le premier neurone et le second neurone sont à 1 (ils ont émis un potentiel d'action au même instant). Si les deux neurones ne sont pas synchronisés, l'apparition d'un « 1 » sur un des trains de spikes n'a aucune influence sur l'apparition d'un « 1 » sur le second train de spikes. On modélise cela par de l'indépendance.

▷ **1)** Une "pure coïncidence" correspond au fait de voir une coïncidence alors que les trains de spikes ne sont pas synchronisés. On note X_1 (resp X_2) la valeur de la case correspondant à un instant donné dans le train de spikes du neurone 1 (resp 2). Quelle est la probabilité d'une pure coïncidence ?

▷ **2)** Quelle est la loi du nombre de pures coïncidences observées jusqu'à l'instant n ? Que vaut sa moyenne ?

Lorsqu'il y a synchronisation entre les deux neurones, leurs *spikes* ont tendance à coïncider plus souvent et donc la probabilité d'observer une coïncidence va être alors strictement plus grande que celle qu'on obtient à la question 1. A partir de cette maintenant, nous notons $X_1(t)$ la variable qui code la présence d'un spike pour le neurone 1 à l'instant t (de même, $X_2(t)$ code pour le second neurone). On considère que pour $t = 1, \ldots, n$, les couples $(X_1(t), X_2(t))$ sont indépendants et identiquement distribués.

▷ **3)** Que vaut $X_1(t)X_2(t)$ lorsqu'il y a une coïncidence au temps t ?

▷ **4)** Quelle est la loi des produits $X_1(t)X_2(t)$? Donner la fonction caractéristique de $X_1(t)X_2(t)$

▷ **5)** Que représente $N_n = \sum_{t=1}^{n} X_1(t)X_2(t)$? Calculer la sa fonction caractéristique.

▷ **6)** Quelle est la loi de N_n ?

▷ **7)** Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable N_n.

▷ **8)** Etudier la convergence presque sûre de N_n/n lorsque n tend vers l'infini.

▷ **9)** On note p la probabilité d'une coïncidence. Montrer que $\sqrt{n}\left(\frac{N_n}{n} - p\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Avec ce résultat, à partir d'un échantillon, on peut comparer p avec la probabilité de pure coïncidence et construire une règle de décision statistique pour décider s'il y a synchronisation ou non, mais on ne vous demande pas de le faire ici.