Licence L3 PFA et PC **Seconde session** **28 juin 2024**

Ondes et Vibrations

Sans document - 2h - Le sujet comporte une page

I. Ondes mécaniques

Le déplacement $u_n(t)$ de l'atome n d'une chaîne monoatomique, créé par le passage d'une onde longitudinale, s'exprime en fonction des déplacements $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$ des deux atomes voisins selon l'équation d'onde suivante :

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = \frac{v_o^2}{a^2}\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) - \omega_o^2 u_n \ ,$$

où ω_o et v_o sont des constantes et a est le pas du réseau.

1. a) Déterminer la relation de dispersion en injectant dans l'équation d'onde une solution du type $u_n(t) = A\exp\left(i(kna - \omega t)\right)$ où A est une amplitude indépendante de n. Tracer la courbe de dispersion (pour $0 \le k \le \pi/a$) et montrer qu'il existe une pulsation de coupure basse ω_o et une pulsation de coupure haute ω_c dont on donnera l'expression. Quelle est l'origine physique de ω_c?

b) Donner les expressions de la vitesse de phase v_φ et de la vitesse de groupe v_g. Que valent v_φ et v_g pour $\omega = \omega_o$ et pour $\omega = \omega_c$?

2. On se place à présent dans l'approximation des milieux continus : $u_n(t) \to u(x,t),\ x = na,\ a \equiv dx$.

a) En développant $u(x \pm dx, t)$ jusqu'à l'ordre 2, établir l'équation d'onde correspondante.

b) Déterminer la relation de dispersion associée à cette équation. Tracer la courbe de dispersion. Commentaires.

c) Que devient la relation de dispersion si $k \gg \frac{\omega_o}{v_o}$ et comment se propage une impulsion dans ce cas ? Mêmes questions pour $k \cong 0$.

II. Oscillations harmoniques libres amorties

La molécule CO peut être assimilée à un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0. Les vibrations de cet oscillateur sont amorties par les collisions avec les autres molécules, on note λ le coefficient d'amortissement. L'équation du mouvement de l'oscillateur s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0\,,$$

où $x(t)$ représente le déplacement par rapport à la position d'équilibre.

1. Donner la condition pour que le mouvement soit oscillatoire amorti.

2. Donner, sans démonstration, la solution $x(t)$ dans ce cas. On supposera que $x(t)=0$ pour $t<0$, $x(0)=A$ et on notera ω_1 la pseudo-pulsation. Exprimer la pseudo-période T_1 en fonction de ω_0 et de λ. Représenter graphiquement l'allure de la solution $x(t)$. Déterminer la constante de temps τ_a en amplitude et rappeler quelle est sa signification physique.