CHARIOT ROULANT SUR UN PLAN FIXE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère une structure mécanique en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Cette structure est formée par l'assemblage de plusieurs systèmes mécaniques, tous rigides et homogènes, articulés entre eux. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur uniforme défini par : $\vec{g} = -g\,\vec{z}$.

La partie principale de la structure considérée est une plateforme S_0 rectangulaire peu épaisse dont $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ est le repère lié. On note : $\psi_0 = (\widehat{x, x_0})$. Elle roule sur le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ par l'intermédiaire de trois roues de géométrie identique $(S_i)_{i\,=\,2,\,3,\,4}$ assimilée chacune à un disque de rayon r et de masse m.

On définit la position du point O_0 par rapport à R suivant les axes $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ par les paramètres X et Y. Les roues étant supposées toujours en contact avec le plan, la coordonnée de O_0 suivant l'axe $(O, \vec{z})$ est constante et égale à $r + l$ (voir dessin).

Les roues $(S_i)_{i\,=\,3,\,4}$ sont placées à l'arrière de la plateforme par rapport au sens d'avancement. Elles sont en contact avec le plan sur lequel elles roulent au point géométrique $(I_i)_{i\,=\,3,\,4}$. L'axe de ces deux roues est rigidement lié à la plateforme et leur repère lié est désigné par $R_i = (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_0, \vec{z}_i)$ de telle sorte que le plan dans lequel elles sont contenues au cours du temps est un plan fixe par rapport à la plateforme : c'est le plan vertical $(O_i, \vec{x}_0, \vec{z})$ ou bien de manière équivalente le plan $(O_i, \vec{x}_i, \vec{z}_i)$. On note $\varphi_i = (\widehat{x_0, x_i}) = (\widehat{z, z_i})$. On donne la matrice d'inertie des roues :

$$\left[J_{O_i}(S_i)\right]^{R_i} = \frac{m\,r^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On estime que la liaison entre S_i et S_0 est une liaison rotoïde parfaite d'axe $(O_i, \vec{y}_0)$.

La roue S_2 est placée à l'avant de la plateforme par rapport au sens d'avancement. Elle est en contact avec le plan sur lequel elle roule au point géométrique I. L'axe de cette roue n'est pas rigidement lié à la plateforme. Il est solidaire d'une pièce rigide S_1 de masse m_1 dont $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est le repère lié qui est articulée sur la plateforme. Le seul mouvement de cette pièce par rapport à la plateforme est une rotation d'angle ψ_1 autour de l'axe $(O_0, \vec{z})$ (voir dessin). On donne la matrice d'inertie de cette pièce :

$$\left[J_{O_1}(S_1)\right]^{R_1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

On estime que la liaison entre S_0 et S_1 est une liaison rotoïde parfaite d'axe $(O_0, \vec{z})$.

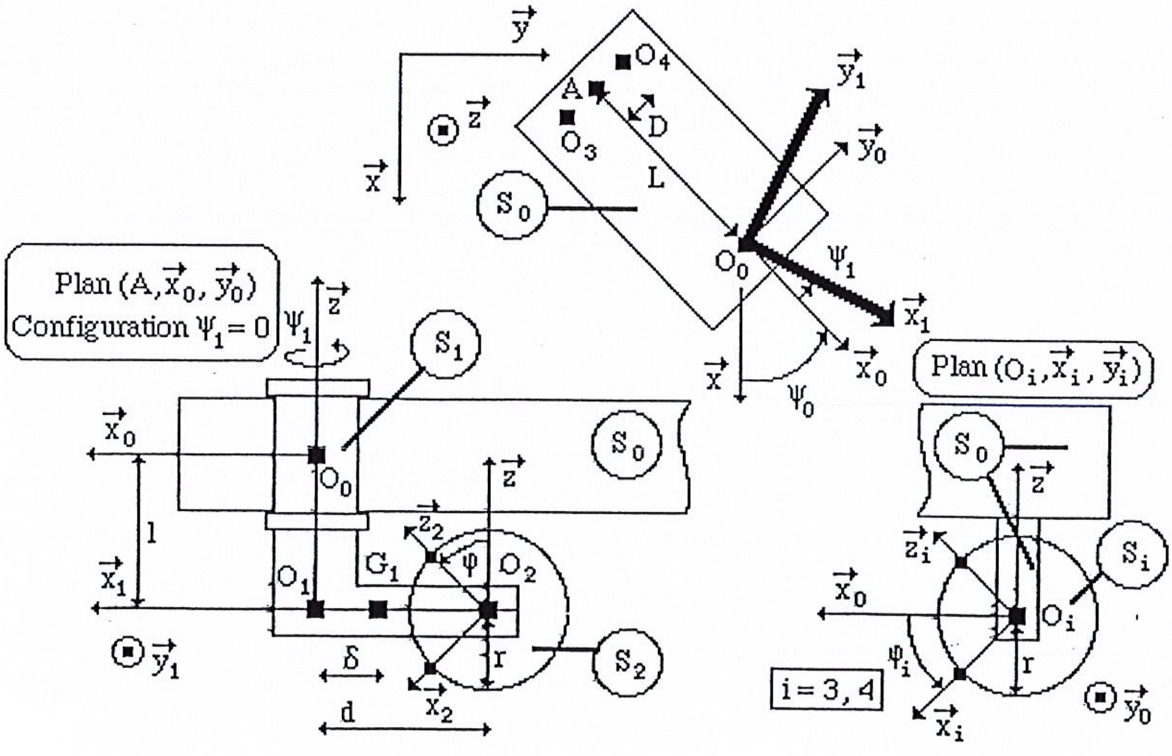
Le repère lié à la roue S_2 est désigné par $R_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ de telle sorte que le plan dans lequel elle est contenue au cours du temps $(O_2, \vec{x}_2, \vec{z}_2)$ n'est pas un plan fixe par rapport à la plateforme. Ce plan reste toutefois toujours un plan vertical perpendiculaire au plan de la plateforme et contenant l'axe $(\vec{z})$. On note $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}, \vec{z}_2)$. On donne la matrice d'inertie de la roue :

$$\left[J_{O_2}(S_2)\right]^{R_2} = \frac{m\, r^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On estime que la liaison entre S_2 et S_1 est une liaison rotoïde parfaite d'axe $(O_2, \vec{y}_1)$.

On donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OO_0} = X\,\vec{x} + Y\,\vec{y} + (l + r)\,\vec{z} \\ \overrightarrow{O_0O_1} = -\,l\,\vec{z} \\ \overrightarrow{O_1O_2} = -\,d\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_0O_2} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} = -\,l\,\vec{z} - d\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_0O_3} = \overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AO_3} = -\,L\,\vec{x}_0 - D\,\vec{y}_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{O_0O_4} = \overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AO_4} = -\,L\,\vec{x}_0 + D\,\vec{y}_0 \\ \overrightarrow{O_1G_1} = -\,\delta\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_2G_1} = (d - \delta)\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_0G_1} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1G_1} = -\,l\,\vec{z} - \delta\,\vec{x}_1 \end{cases}$$



1. CINEMATIQUE (le repère R_0 est utilisé comme repère de projection)

1.1. Justifier pourquoi :

- les points O_0, O_3 et O_4 peuvent être considérés comme des points de S_0 ;
- le point O_2 peut être considéré comme un point de S_1 et S_2.

1.2. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_0 par rapport à R en O_0, O_3 et O_4.

1.3. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_1 par rapport à R en O_0, O_2 et G_1.

1.4. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_2 par rapport à R en O_2.

1.5. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de $(S_i)_{i=3,4}$ par rapport à R en $(O_i)_{i=3,4}$.

1.6. Donner l'expression des conditions de roulement sans glissement aux points I_3, I_4 et I, en fonction des différents paramètres géométriques, angulaires et de position.

<u>On se place dans toute la suite du problème dans la configuration suivante :</u>

$$\begin{cases}\psi_0(t) = 0\\ \dot{X}(t) = \text{constante},\ \dot{Y}(t) = 0\end{cases}$$

2. CINETIQUE

2.1. Donner l'expression de la matrice de l'opérateur d'inertie de S_1 en G_1 dans la base b_1 en fonction de m_1, δ, α, β, γ.

2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique parrapport à R du solide S_1 en fonction de $\dot{X}$, $\dot{\psi}_1$, ψ_1, m_1, δ et γ (le repère R est utilisé comme repère de projection).

2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur dynamique par rapport à R du solide S_1 (le repère R est utilisé comme repère de projection).

2.4. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S_1 par rapport à R.

2.5. Donner l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur cinétique par rapport à R du solide S_2 en fonction de $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}_1$, m et r (le repère R_1 est utilisé comme repère de projection).

2.6. Donner l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur dynamique par rapport à R du solide S_2 (le repère R_1 est utilisé comme repère de projection).

2.7. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S_2 par rapport à R.

3. DYNAMIQUE

3.1. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en G_1 des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S_1 (le repère R est utilisé comme repère de projection).

3.2. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O_2 des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S_1 (le repère R_1 est utilisé comme repère de projection).

3.3. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_2 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).