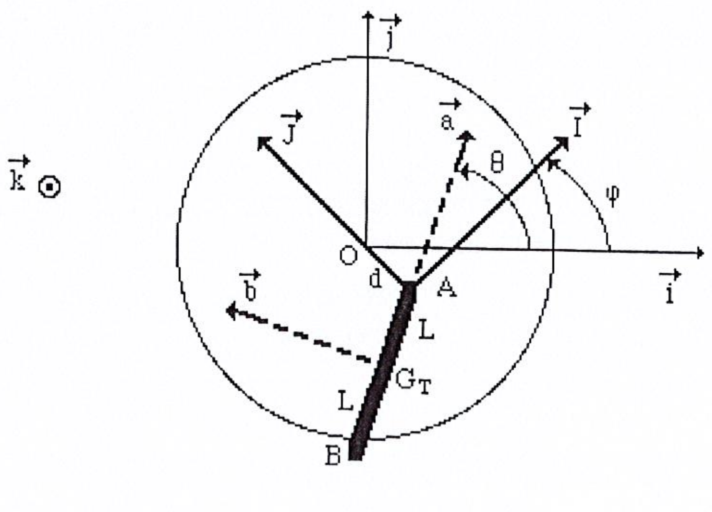
TIGE EN MOUVEMENT AUTOUR D'UN POINT MOBILE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère deux systèmes mécaniques D et T en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur défini par : $\vec{g} = -g\,\vec{j}$.

Le solide D est un disque rigide homogène de rayon r dont G_D désigne le centre de masse, μ la densité surfacique de masse et M la masse totale. On définit le point A du disque situé à la distance d de G_D. Le repère lié à D est le repère orthonormé $R_D = (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de telle sorte que : $\overrightarrow{AG_D} = d\,\vec{J}$, l'axe $(A, \vec{K})$ est perpendiculaire au plan du disque et $\vec{I} = \vec{J} \wedge \vec{K}$. Le centre de masse du disque est maintenue en O à un bâti rigide fixe (dont R est le repère lié) par une liaison rotoïde parfaite d'axe $(O, \vec{k})$. Le disque est donc astreint au cours de son mouvement à rester dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ainsi, à tout instant : $\vec{K} = \vec{k}$. On pose $\varphi = (\widehat{\vec{i}, \vec{I}})$.

Le solide T est une tige rigide unidimensionnelle homogène de longueur 2L dont G_T désigne le centre de masse, ρ la densité linéïque de masse et m la masse totale. Une de ses extrémités est maintenue en A par une liaison rotoïde parfaite d'axe $(A, \vec{k})$. L'autre extrémité B est libre. La tige est donc astreinte au cours de son mouvement à rester dans le plan du disque. Le repère lié à T est le repère orthonormé $R_T = (G_T, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ construit de telle sorte que $\overrightarrow{BA} = 2L\,\vec{a}$ et que l'axe $(G_T, \vec{b})$, perpendiculaire à l'axe de la tige, est dans le plan du disque. Ainsi, à tout instant : $\vec{c} = \vec{k}$. On pose $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$.



1. CINEMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinématique par rapport à R du disque.

1.2. Donner l'expression des éléments de réduction en A du torseur cinématique par rapport à R de la tige.

2. CINETIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

2.1. Calculer la matrice de l'opérateur d'inertie du disque en G_D dans le repère R_D.

2.2. Calculer la matrice de l'opérateur d'inertie de la tige en G_T dans le repère R_T.

2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinétique par rapport à R du disque.

2.4. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinétique par rapport à R de la tige.

2.5. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinétique par rapport à R du système S formé par l'ensemble (disque + tige).

2.6. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur dynamique par rapport à R du disque.

2.7. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur dynamique par rapport à R de la tige.

2.8. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur dynamique par rapport à R du système S.

2.9. Donner l'expression de l'énergie cinétique du disque par rapport à R.

2.10. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la tige par rapport à R.

2.11. Donner l'expression de l'énergie cinétique du système S par rapport à R.

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

3.1. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur le disque. Pour chacun d'eux, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont ils dérivent.

3.2. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en G_T des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur la tige. Pour chacun d'eux, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont ils dérivent.

3.3. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs et intérieurs qui s'exercent sur le système S. Pour chacun d'eux, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont ils dérivent.

3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au disque en O (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.5. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la tige en G_T (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.6. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au système en O (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.7. En supposant que les équations du mouvement sont résolues, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(t)$ et $\theta(t)$ sont connues, montrer qu'on peut donner l'expression des éléments de réduction des différents torseurs de liaison.

3.8. Ecrire l'équation qui gouverne l'évolution des paramètres φ et θ.

4. ETUDE D'UN MOUVEMENT PARTICULIER

4.1. Expliciter la relation liant $\varphi(t)$ et $\theta(t)$ pour qu'à chaque instant les points O, A et B (dans cet ordre) soient alignés. En déduire la relation entre $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ et celle entre $\ddot{\theta}(t)$ et $\ddot{\varphi}(t)$.

On se place désormais dans cette configuration dans toute la suite.

4.2. Ecrire l'équation qui gouverne l'évolution de $\theta(t)$ sous la forme : $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$

4.3. Trouver la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable quand le système est écarté légèrement de cette position.