Mécanique des Milieux Continus 2 - 22 mai 2024 **L3 SPI**

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

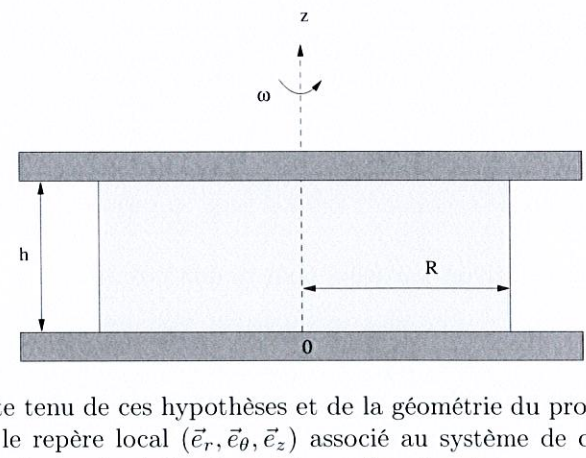
Nom et prénom :

....

Durée : 2h00 - Formulaire opérateurs différentiels autorisé - calculatrice collège autorisée.

Exercice 1 :

On considère l'écoulement **permanent** d'un film de fluide cylindrique de rayon R et de faible épaisseur h entre deux plaques circulaires parallèles horizontales situées en $z = 0$ et $z = h$. La **plaque inférieure est supposée fixe** tandis que le **plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire** ω (voir figure). Le fluide visqueux entre les deux plaques est **incompressible et newtonien**, de viscosité dynamique μ. Les **actions de volume (forces de pesanteur) sont négligeables**, et on suppose que la vitesse de rotation est suffisamment faible pour que **les termes d'accélération des équations de Navier-Stokes (dérivée particulaire de la vitesse) soient également négligeables**.



On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est de la forme $\vec{v} = v_\theta(r, z)\ \vec{e}_\theta$ où v_θ est une fonction inconnue dépendant de r et z que l'on cherche à déterminer. On désigne par p_{atm} la pression atmosphérique en $r = R$ et par $p(r, z)$ la pression dans le fluide que l'on cherche à déterminer également.

1. Vérifier l'incompressibilité du fluide.

☐F ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

2. On donne l'expression des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour un fluide incompressible :

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{dV_r}{dt} &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2}\right]\\
\rho\frac{dV_\theta}{dt} &= \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2}\right]\\
\rho\frac{dV_z}{dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right]
\end{aligned}
$$

2.1. Montrez que la pression $p(r,z) = K_1$ où K_1 est une constante que l'on précisera.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2. Déduire l'équation aux dérivées partielles dont v_θ doit être solution.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

3. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme : $v_\theta = f(r)g(z)$.

3.1. Indiquer les conditions aux limites de la vitesse v_θ en $z = 0$ et $z = h$. Montrer alors que $g(0) = 0$. Montrer ensuite que la fonction $f(r) = \omega\, r/g(h)$.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

3.2. Calculez $f'' = \dfrac{d^2 f}{dr^2}$ et $f' = \dfrac{df}{dr}$. En utilisant l'expression de $f(r)$ de la question précédente, en déduire que $f' = f/r$.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

4. Écrire l'équation aux dérivées partielles obtenue dans la question 2.2 en fonction de f' et f''. En remplaçant les expressions de f' et de f'' (cf. question 3.2), terminer la détermination de $v_\theta(r, z)$ et montrer que : $v_\theta(r, z) = K_2.rz$ où K_2 est une constante que l'on précisera.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

5. Déterminer l'expression des tenseurs des vitesses de déformation $\bar{\bar{D}}$ et des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ (formulaire en fin de sujet).

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

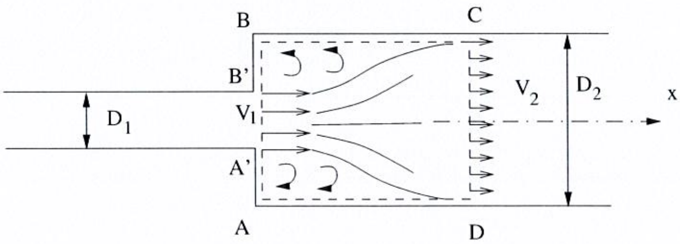
....

6. Calculer le couple C exercé par le fluide sur la plaque supérieure du viscosimètre et dont la mesure permet la détermination du coefficient de viscosité μ en fonction de ω, R et h.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

Exercice 2 :

On considère deux **conduites cylindriques** coaxiales de diamètres D_1 et D_2 ($D_2 > D_1$). L'expérience montre qu'à la sortie de la conduite de diamètres D_1 il se forme **un jet de diamétre** D_1 dont on suppose la vitesse V_1 uniforme. Il y a décollement des lignes de courant et formation d'une zone de recirculation (fluide mort à **vitesse nulle** entre AA' et BB' sur la figure), mais **la pression motrice** p_1^* **reste constante en moyenne dans la section** AB. À une distance suffisante en aval, **la vitesse** V_2 **redevient uniforme dans la conduite de diamètres** D_2, **la pression motrice** p_2^* **est également constante dans la section** CD. Dans tout le problème on suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible.



1. Exprimer la perte de charge ΔH produite à l'élargissement brusque entre les sections AB et CD en fonction de ρ, g, p_1^*, p_2^*, V_1 et V_2.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

2. Pour exprimer la différence de pression motrice de la question précédente en fonction des vitesses, on utilise le théorème d'Euler.

2.1 Représenter en 3D et paramétrer la surface de contrôle délimitée par les $ABCD$ sur la figure.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 Appliquer le théorème d'Euler à la surface de contrôle **en projection sur l'axe** $\vec{x}$. En déduire l'expression de $(p_1^* - p_2^*)$ (**Attention aux surfaces et aux vitesses !**).

Indication : On supposera les contraintes tangentielles liées à la viscosité négligeables par rapport aux forces de pression, on admettra donc que (S étant une surface de contrôle) :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{g} - \oint_S p\vec{n}\, dS \;=\; -\oint_S p^* \vec{n}\, dS$$

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. En déduire la relation de Borda-Carnot qui exprime la perte de charge ΔH en fonction de V_1, V_2 et g.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. À l'aide de la relation de Borda-Carnot et de l'expression d'une perte de charge singulière (**dans laquelle on utilisera la vitesse la plus rapide**) déduire l'expression du coefficient de perte de charge singulière K d'un élargissement brusque en fonction de D_1 et D_2.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 3 :

On étudie un écoulement plan permanent, irrotationnel d'un fluide parfait. En tout point M de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan $0xy$, l'écoulement est caractérisé par son potentiel complexe :

$$f(z) = Uz + \frac{K}{z}$$

où U désigne la vitesse de l'écoulement à l'infini parallèle à l'axe x et K une constante. On note $z = x + i\ y$ l'affixe de M (avec $i^2 = -1$).

1. Exprimez le potentiel des vitesses ϕ et la fonction de courant ψ en coordonnées cartésiennes.

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

2. Déterminez les composantes cartésiennes v_x et v_y du champ des vitesses ($\vec{v} = v_x\vec{x} + v_y\vec{y}$) de l'écoulement étudié (les exprimer sous la forme d'une fraction de dénominateur $(x^2 + y^2)^2$).

☐F ☐P1 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

Formulaire :

Équation de continuité (ECM) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r\, V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho\, V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho\, V_z)}{\partial z} = 0$

$$\overline{\overline{grad}}\vec{A} = \begin{pmatrix} A_{r,r} & \left(\frac{A_{r,\theta}}{r} - \frac{A_\theta}{r}\right) & A_{r,z} \\ A_{\theta,r} & \left(\frac{A_{\theta,\theta}}{r} + \frac{A_r}{r}\right) & A_{\theta,z} \\ A_{z,r} & \frac{A_{z,\theta}}{r} & A_{z,z} \end{pmatrix}_{vece_r, vece_\theta, vece_z}$$