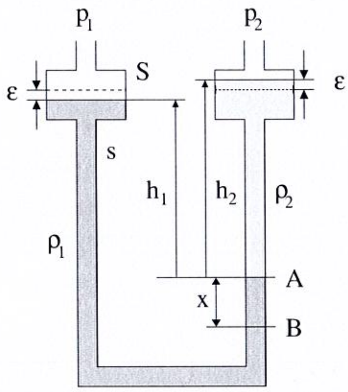
# Contrôle de Mécanique des fluides - Session 2

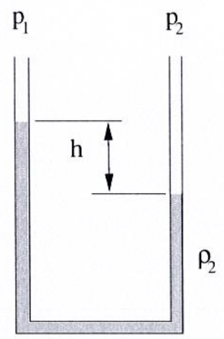
25 juin 2024 – durée : 1 heures 30

Sans document - calculatrices collège autorisées

## Exercice 1

Un manomètre constitué d'un tube en U se section $s$ et de deux réservoirs de section $S$ où se trouvent les surfaces libres des 2 liquides. Les deux liquides sont au repos et incompressibles. Le tube en U de la figure de droite est étudié à la question 2.d.




1. Lorsque les pressions $p_1$ et $p_2$ sont égales à la pression atmosphérique (manomètre ouvert par exemple), l'interface des deux liquides de masse volumique $\rho_1$ et $\rho_2$ se trouve en $A$ et les surfaces libres des deux liquides sont respectivement situées à des hauteurs $h_1$ et $h_2$ par rapport à $A$ (voir figure).Donner la relation entre $h_1$, $h_2$, $\rho_1$ et $\rho_2$.

2. Lorsqu'on le manomètre est raccordé et que la pression $p_2$ est supérieure à la pression $p_1$, l'interface se déplace de $x$ au point $B$ et les surfaces libres de $\varepsilon$ (traits pointillés sur la figure).

   (a) Les fluides étant incompressibles, donner l'expression de $\varepsilon$ en fonction de $s$, $S$ et $x$.

   (b) Exprimer la différence de pression $\Delta p = p_2 - p_1$ en fonction de $x$, $\rho_1$, $\rho_2$, $g$, $s$ et $S$ (indication : utiliser la relation établie à la question 1 (qui reste valable) et l'expression de $\varepsilon$ établie à la question précédente).

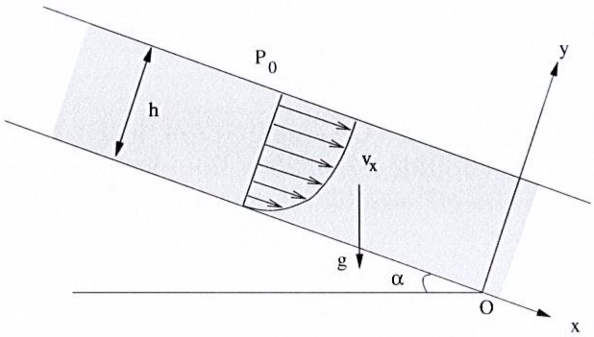
   (c) Faire l'application numérique donnant la valeur de $p_2 - p_1$.

   (d) Calculer la hauteur $h$ correspondant à la même différence de pression $p_2 - p_1$ que l'on obtiendrait avec le tube en U de la figure de droite.

**AN :** $x = 10\ cm$, $S/s = 200$, $\rho_1 = 1.024.10^3\ kg/m^3$, $\rho_2 = 10^3\ kg/m^3$, $g = 10\ m.s^{-2}$.

## Exercice 2

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$ : vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-dessous). On note $h$ l'épaisseur constante de l'écoulement, et $P_0$ la pression atmosphérique à la surface libre.




1. (2 pts) En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x\ \vec{e}_x\ \ (V_y = 0)$, montrer que la composante $V_x$ ne dépend que de $y$. En déduire l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes $Ox$ et $Oy$ (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère $Oxy$ et utiliser les équations de Navier-Stokes du formulaire).
2. Montrer que la pression $p(x, y)$ a pour expression :

$$p(y) = (h - y)K_1 + K_2$$

   où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes à préciser.
3. (1 pt) Écrire la première équation de Navier Stokes (projection sur l'axe $x$). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse $V_x$.
4. (1 pt) Déterminer l'expression de $V_x(y)$.
5. (1 pt) On donne la condition limite à la surface libre $(y = h)$ : $\dfrac{dV_x}{dy} = 0$.

   En précisant la condition limite à la paroi $(y = 0)$, déduire l'expression du champ des vitesses en fonction de $\rho$, $g$, $\alpha$, $h$, $y$ et $\mu$.
6. (1 pt) En déduire la forme du profil et dire comment varie la vitesse en fonction de la viscosité (sans faire de calcul).
7. (1 pt) Calculer la vitesse moyenne $V_m$.

**Formulaire** :

Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\ p + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \rho \vec{g}$$

avec : $\vec{\Delta}\vec{V} = \Delta V_x \vec{e}_x + \Delta V_y \vec{e}_y$ et $\Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en deux dimensions.