Etude des oscillations d'un culbuto

sur une idée de G. Bureau et J. Pianezze (Etudiants de L3-Mécanique, 2006-2007)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ supposé galiléen, où le vecteur $\vec{x_3}$ est vertical ascendant. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur noté $-g\vec{x_3}$.

Le système étudié, appelé S, est un culbuto (Fig. 1) modélisé comme étant un système parfaitement rigide formé par l'assemblage d'un cône de hauteur L à base circulaire s_c de rayon r et d'une demi-sphère de rayon r dont on note s_b la surface de base. Dans cet assemblage, les surfaces s_c et s_b ne constituent qu'une seule et même surface, notée s.

Le repère lié au solide, orthonormé direct, est noté $R_s = (O_s, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où O_s est le centre géométrique de la surface s et $\vec{K}$ est le vecteur qui oriente l'axe de rotation propre. On note b_s la base de R_s. Les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont dans le plan qui contient la surface s. La pointe du cône est désignée par le point A, telle que $\overrightarrow{O_sA} = L\vec{K}$. On note B le sommet de la demi-sphère tel que $\overrightarrow{O_sB} = -r\vec{K}$.

Le système est supposé homogène constitué d'un matériau dont ρ désigne la masse volumique. La masse totale de S est notée m, G est son centre de masse et on pose $\overrightarrow{O_sG} = d\vec{K}$. On montre : $d = \frac{L^2-3r^2}{4(L+2r)}$. On donne la matrice d'inertie de S au point G, dans b_s :

$$[J_G(S)]^{b_s} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} m = \rho\pi\frac{r^2}{3}(L+2r) \\ I_{XX} = \frac{\rho\pi r^2}{60}(6L^3 + 2Lr^2 + 16r^3) \\ M = I_{XX} - md^2 = \frac{\rho\pi r^2}{240(L+2r)}(19L^4 + 48L^3r + 30L^2r^2 + 12Lr^2 + 64r^3L + 24r^3 + 83r^4) \\ N = \frac{\rho\pi r^4}{60}(3L + 16R) \end{cases}$$

Le culbuto est posé (la demi-sphère vers le bas) sur le plan $(O, \vec{x_1}, \vec{x_2})$ sur lequel il est libre de rouler sans glisser. On note I le point de contact géométrique entre S et le plan et $\overrightarrow{OI} = x(t)\vec{x_1} + y(t)\vec{x_2}$. On note I_s le point matériel de S au lieu du contact. On utilise les angles d'Euler usuels ψ, θ et φ (Fig. 2, Formulaire) pour mettre en coïncidence les repères R_s et R, pour lesquels les valeurs $\psi = 0$, $\theta = 0$ et $\varphi = 0$ confondent R_s et R.

Dans l'exercice, les calculs seront faits avec les grandeurs d, m et la forme de $[J_G(S)]^{b_s}$ en fonction de M et N, sans utiliser les formes explicites de ces coefficients en fonction de ρ, L et r.

1 Cinématique (le repère R_b sera utilisé comme repère de projection)

1) En utilisant le fait que S roule sans glisser sur le plan $(O, \vec{x_1}, \vec{x_2})$, donner les éléments de réduction du torseur cinématique de S par rapport à R en I_s et G.

2) Calculer l'accélération de G par rapport à R.

2 Cinétique (le repère R_b sera utilisé comme repère de projection)

1) Donner les éléments de réduction du torseur cinétique de S par rapport à R en G.

2) Donner les éléments de réduction du torseur dynamique de S par rapport à R en G.

3) Calculer l'énergie cinétique de S par rapport à R.

3 Dynamique (le repère R_b sera utilisé comme repère de projection)

1) Faire le bilan des sollicitations mises en jeu et donner le torseur qui modélise chacune d'elle, ainsi que sa puissance développée dans le mouvement de S par rapport à R et éventuellement le potentiel dont elle dérive.

2) Ecrire les équations que l'on peut déduire du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à S.

3) Montrer que si l'on suppose connues les fonctions $\psi(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, alors, on connait, au cours du temps, l'ensemble des torseurs d'effort auxquels est soumis le système.

4) On a : $\overrightarrow{OO_s} = x_{O_s}(t)\vec{x_1} + y_{O_s}(t)\vec{x_2} + z_{O_s}(t)\vec{x_3} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IO_s} = x(t)\vec{x_1} + y(t)\vec{x_2} + r\vec{x_3}$. Ainsi, à tout instant : $x_{O_s}(t) = x(t)$, $y_{O_s}(t) = y(t)$ et $z_{O_s}(t) = r$. On suppose que le mouvement du système est ici obtenu à partir des conditions initiales (à $t = t_0 = 0$) suivantes :
- pour les angles d'Euler,
  - . $\psi(t_0) = \psi_0 = 0, \dot{\psi}(t_0) = \dot{\psi}_0 = 0$;
  - . $\theta(t_0) = \theta_0 \neq 0, \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \neq 0$;
  - . $\varphi(t_0) = \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0 = 0$.
- pour les paramètres de translation,
  - . $x_{O_s}(t_0) = x_0$;
  - . $y_{O_s}(t_0) = y_0$;
  - . $z_{O_s}(t_0) = r$.

On montre alors que dans ce cas : $\psi(t) = 0$, $\varphi(t) = 0$. Montrer qu'alors, l'équation différentielle qui gouverne l'angle θ est :

$$\ddot{\theta}(t)(r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta(t) + \frac{M}{m}) - \dot{\theta}^2(t)rd\sin\theta - gd\sin\theta(t) = 0$$

5) Montrer qu'on peut obtenir alors une équation de la forme :

$$\dot{\theta}^2(t)f(\theta(t)) = F(\theta(t)) + K$$

où :
- $f(\theta) = r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta + \frac{M}{m}$;
- $f(\theta) > 0$ quel que soit le signe de d ;
- $F(\theta) = -2gd\cos\theta$;
- K est une constante.

6) Retrouvez cette équation en appliquant le Théorème de l'Energie Cinétique.

7) Trouver les positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

8) Donner l'expression de $x_{O_s}(t)$, $y_{O_s}(t)$ et $z_{O_s}(t)$ en fonction des conditions initiales et de $\theta(t)$.

4 Formulaire : rappels sur les angles d'Euler

A partir du repère $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$, on définit les repères suivants :

- $R' = (O_s, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est obtenu à partir de R par une translation de vecteur $\overrightarrow{OO_s}$;
- $R_a = (O_s, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x_3})$ est obtenu à partir de R' par une rotation d'axe $(O_s, \vec{x_3})$ et d'angle ψ. Ainsi : $\psi = \widehat{(\vec{x_1}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{x_2}, \vec{v})}$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \cos\psi \vec{x_1} + \sin\psi \vec{x_2} \\ \vec{v} = -\sin\psi \vec{x_1} + \cos\psi \vec{x_2} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{x_1} = \cos\psi \vec{u} - \sin\psi \vec{v} \\ \vec{x_2} = \sin\psi \vec{u} + \cos\psi \vec{v} \end{array} \right.$$

- $R_b = (O_s, \vec{u}, \vec{w}, \vec{K})$ est obtenu à partir de R_a par une rotation d'axe $(O_s, \vec{u})$ et d'angle θ. Ainsi : $\theta = \widehat{(\vec{x_3}, \vec{K})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w} = \cos\theta \vec{v} + \sin\theta \vec{x_3} \\ \vec{K} = -\sin\theta \vec{v} + \cos\theta \vec{x_3} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \cos\theta \vec{w} - \sin\theta \vec{K} \\ \vec{x_3} = \sin\theta \vec{w} + \cos\theta \vec{K} \end{array} \right.$$

- $R_s = (O_s, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est obtenu à partir de R_b par une rotation d'axe $(O_s, \vec{K})$ et d'angle φ. Ainsi : $\varphi = \widehat{(\vec{u}, \vec{I})} = \widehat{(\vec{w}, \vec{J})}$ et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{I} = \cos\varphi \vec{u} + \sin\varphi \vec{w} \\ \vec{J} = -\sin\varphi \vec{u} + \cos\varphi \vec{w} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \cos\varphi \vec{I} - \sin\varphi \vec{J} \\ \vec{w} = \sin\varphi \vec{I} + \cos\varphi \vec{J} \end{array} \right.$$

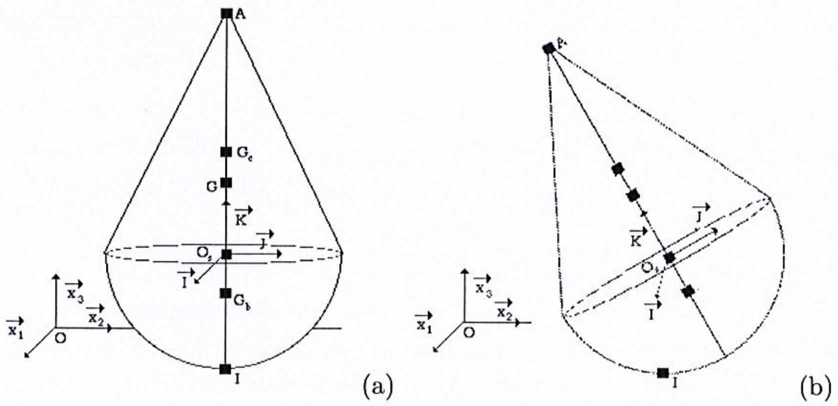

FIG. 1 – Le système. (a) Dans le cas où $\psi = 0, \theta = 0, \varphi = 0$ (b) En mouvement.

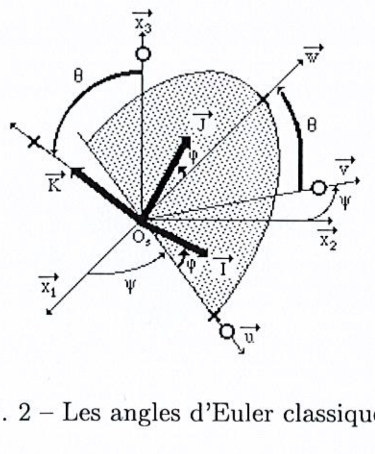

FIG. 2 – Les angles d'Euler classiques.