

**Exercice I.**

a) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (1)$$

où  $a$  est une constante réelle

b) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2)$$

où  $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$  est une matrice réelle.

Pour calculer une fonction  $f$  de la matrice  $A$ , on utilisera le théorème de décomposition spectrale :

$f(A) = \sum_i f(\lambda_i) |u_i\rangle \langle u_i|$  avec les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres (normés) associés  $|u_i\rangle$  de  $A$ .

**Exercice II.**

A) On résout l'équation différentielle de Laguerre, où  $y \equiv y(x)$ , par la méthode de Frobenius

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0. \quad (3)$$

1) Montrer que  $x = 0$  est une singularité régulière.

2) A partir du développement en série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}, \quad (4)$$

(a) déterminer l'équation indicelle ;

(b) déterminer la relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ .

3) Résoudre l'équation indicelle, et en déduire l'expression de la solution

$$y(x) = a_0 \left[ 1 - \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2^2} x^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3^2 2^2} x^3 - \dots \right]. \quad (5)$$

4) Quelles sont les valeurs de  $\alpha$  qui donnent une série avec un nombre de termes fini ?

On les note  $y(x) = L_\alpha(x)$ . Exprimer  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ ,  $L_3(x)$  et  $L_4(x)$  (on choisira la normalisation  $a_0 = 1$ ).

B) Vérifier que

$$y_2(x) = y(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (6)$$

est une seconde solution, où  $y(x)$  sont les solutions obtenues précédemment.

On reportera  $y_2(x)$  dans l'équation et on déterminera la récurrence entre les coefficients  $b_{n+1}$  et  $b_n$ .

**Exercice III.** Dans cet exercice, on note la transformée de Fourier  $F(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\nu x} dx$ .

Soit la fonction triangle  $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}$

1. Calculer la transformée de Fourier de  $f(x)$ . La tracer.

2. En utilisant la formule de Parseval-Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \bar{G}(\nu) d\nu, \quad (7)$$

où on note  $\bar{g}(x)$  le complexe conjugué de  $g(x)$ , en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^4 dx. \quad (8)$$