Université de Bourgogne
Examen de Méthodes Mathématiques - Janvier 2024
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. Dans cet exercice, on résout l'équation de la chaleur par séparation de variable

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

avec $u(x,t)$ la température à la position x au temps t d'une tige de longueur ℓ avec $x \in [0, \ell]$, et les conditions aux bords :

$$\text{condition initiale : } u(x,0) = \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right), \tag{2}$$

$$\text{conditions aux limites : } u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{3}$$

a) Appliquer la séparation de variable, où on notera la constante de séparation λ.
b) Résoudre les équations différentielles résultantes en exprimant les solutions générales. Déterminer le signe de λ afin d'avoir une solution physiquement compatible. On posera $k^2 = -\lambda$.
c) Ecrire les solutions satisfaisant les conditions aux limites.
d) Exprimer la solution satisfaisant la condition initiale.
e) Décrire la dynamique de cette solution.

Exercice II. On note la transformée de Fourier de $f(x)$: $\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$.
a) Montrer les formules impliquant la dérivée

$$\mathcal{F}_\nu[f'(x)] = 2i\pi\nu \mathcal{F}_\nu[f(x)], \tag{4}$$

$$\hat{f}'(\nu) = -2i\pi \mathcal{F}_\nu[x f(x)], \tag{5}$$

où $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de $f(x)$ et $\hat{f}'(\nu)$ la fonction dérivée de $\hat{f}(\nu)$.
b) Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2i\pi x f(x) = 0 \tag{6}$$

avec $f(x)$ la solution inconnue, telle que $f(0) = 1$.
c) Appliquer la transformée de Fourier sur l'équation (6) puis résoudre l'équation différentielle résultante.
d) En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\pi x^2} = 1$, en déduire que

$$\mathcal{F}_\nu(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi \nu^2}. \tag{7}$$

e) Par la formule de changement d'échelle, en déduire que

$$\mathcal{F}_\nu(e^{-a x^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\nu^2}. \tag{8}$$

Exercice III. Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}$$

avec $u(x,t)$ la température à la position x au temps t, et la condition initiale $u(x,0) = e^{-(x/\sigma)^2}$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x.
On s'aidera des résultats de l'exercice I.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale sur cette équation (9) et sur la condition initiale.
On notera $\hat{u}(\nu, t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx$.
b) Résoudre l'équation différentielle résultante.
c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Décrire la dynamique de cette solution.
d) Ecrire la forme de la solution pour une condition initiale quelconque $u(x,0) = g(x)$.

Exercice IV. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & -2\beta \end{bmatrix}, \quad \beta \text{ réel.} \tag{10}$$

a) Déterminer sa valeur propre λ et son vecteur propre $|u\rangle$ uniques, et en déduire qu'elle n'est pas diagonalisable.

b) Montrer que la transformation (similitude) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1/\beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$ appliquée sur cette matrice (10) ramène à la matrice de Jordan de la forme $J_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

c) En utilisant la matrice nilpotente $Q_2 = J_2 + \beta\mathbb{I}$ avec $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, satisfaisant $Q_2^2 = 0$, déterminer $e^{J_2 x}$ avec x réel.

d) Montrer que $A^2 = TJ_2^2T^{-1}$, puis $A^n = TJ_2^nT^{-1}$ pour tout entier positif n, et enfin $f(A) = Tf(J_2)T^{-1}$ pour une fonction $f(x)$ définie par un développement en puissance entière (Taylor) $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

e) En déduire e^{Ax}.