Les questions en *italique* sont des *questions de cours.*

Exercice 1. Pour $n \geq 1$, on munit $\mathbb{R}[X]_n$ du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$.

(1) Montrer que l'application linéaire $\phi(f) = f'' - 2xf'$ est symétrique.

(2) Pour $n = 2$, écrire la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2)$.

(3) Trouver une base orhonormale de E constituée de vecteurs propres de f si $n = 2$.
Indication : on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et f l'endomorphisme de E dont la matrice en la base canonique est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est orthogonal.
2. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.
3. Justifier que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
4. Dire quel est le plus petit entier $k > 0$ tel que f^k est l'identité.
5. Justifier que f^3 est une symétrie orthogonale. De quel axe ?

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que M est diagonalisable en une base de vecteurs propres.
2. Pour $a = -1$, trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que μM est une symétrie orthogonale. De quel axe ?
3. Pour $a = 2$, trouver une base orhonormée de vecteurs propres de M.

Exercice 4. Soit E un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot|\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme sur E. Pour tout $u, v \in E$, posons $d(u, v) = \|u - v\|$. Soit F un sous espace vectoriel de E.

(a) Montrer que, pour tout $w \in E$, on a $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

(b) *Soit $u \in E$. Montrer que $d(u, F) := \inf\{d(u, v) \mid v \in F\}$ est bien posé et s'annule si $u \in F$.*

(c) *Montrer que F contient au plus un élément v tel que $d(u, v) = d(u, F)$.*

(d) *Soit $\dim(F) < \infty$. Justifier que les projetés orthogonaux v et w de u sur F et $F^\perp$ sont bien posés puis montrer que $d(u, v) = d(u, F) = \|w\|$.*

(e) Soit E l'espace des séries numériques de carré sommable, muni du produit scalaire

$$\langle \sum_{n\geq 0} u_n | \sum_{n\geq 0} v_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n, \qquad \text{pour tout } \sum_{n\geq 0} u_n, \sum_{n\geq 0} v_n \in E.$$

Soit $F \subset E$ le sous espace des séries n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

i) Soit u la série géométrique de raison $1/2$. Montrer que $u \in E \setminus F$.

ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ calculer $d(u, v[k])$ où la série $v[k] = \sum_{n\geq 0} v[k]_n$ est définie par :

$$v[k]_n = \begin{cases} 1/2^n, & \text{si } n \leq k, \\ 0, & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Justifier que $d(u, v[k])$ tend vers 0 si k tend vers ∞.

iii) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $G_k = \{\sum_{n\geq 0} w_n \in E \mid w_n = 0, \forall n > k\}$. Calculer $d(u, G_k)$.

(f) Pour $u \in E$ général, peut-on dire que $d(u, F) = 0$ si et seulement si $u \in F$? Et si $\dim(F) < \infty$?