Université de Bourgogne L2

2023-2024

Analyse S4 : Session 2, 17/06/2024. Durée : 2h.

Les documents et appareils électroniques sont interdits. Une rédaction soignée et rigoureuse est attendue.

A Questions de cours

1. Donner la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions.
2. Donner la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
3. Montrer que si une suite de fonctions converge uniformément vers une limite, alors elle converge simplement vers cette limite.
4. Donner un exemple de suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément vers une limite.

B Fonctions de plusieurs variables

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Montrer que f est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Déterminer les points critiques.
3. En étudiant $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ montrer que $(0, 0)$ est un point selle.
4. Pour chacun des autres points critiques, déterminer si f y prend un minimum local, maximum local, ou si c'est un point selle.

C Séries de fonctions

On considère la série de fonctions (lorsqu'elle est définie)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]0, \infty[$.
2. Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in [p+1, 2p]$, $\frac{x}{n^2+x^2} \geq \frac{x}{x^2+4p^2}$
3. Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{n^2 + x^2} \geq \frac{px}{x^2 + 4p^2}$.
4. En déduire que quelque soit p, il existe $x > 0$ tel que $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{2p} \frac{x}{n^2 + x^2} \geq \frac{1}{5}$.
5. En déduire que la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]0, \infty[$.

D Intégration

Étudier la convergence de l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$