Rattrapage – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifiez vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Pour toute la suite, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble

$$A := \{a^n \mid n \in [\![0; 2k]\!]\} \text{ ?}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 2.
Soit $f\colon G \to (\mathbb{R}^*, \times)$ un morphisme de groupes. On suppose que G est un groupe fini. On suppose également que $\ker(f) \neq G$ et on pose $H := \ker(f)$.
1) Si $x \in G \setminus H$, déterminer $f(x)$.
2) Soit $z, y \in G$. A-t-on $f(yzy^{-1}) = f(z)$?
3) Soit $x \in G \setminus H$. Montrer que $xH := \{xy \mid y \in H\}$ vérifie
i) $xH \cap H = \varnothing$,
ii) $G = H \cup xH$,
iii) $\mathrm{Card}(xH) = \mathrm{Card}(H)$.

Exercice 3.
Soit G' un deuxième groupe dont on note e' l'élément neutre. Soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit H' un sous-groupe de G'.
A-t-on forcément que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in G$ un élément d'ordre n.
1) Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $y^k = e$ alors n divise k.
2) Supposons ici que $n = 52$. Quel est l'ordre de y^3 ?

Exercice 5.
a) Soit $a \in G$. On définit l'ensemble C_a par $C_a := \{x \in G \mid ax = xa\}$. Montrer que C_a est un sous-groupe de G.
b) L'ensemble $Z := \{x \in G \mid \forall y \in G \;\; yx = xy\}$ est-il un sous-groupe de G ?