Examen
Mercredi 20 décembre 2023 (Durée: 2h)

Exercice 1 (Questions de cours (6 points)).

(1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E. Montrer que les racines du polynôme minimal de f sont exactement les valeurs propres de f.

(2) Énoncer et démontrer le théorème des projecteurs spectraux.

(3) Application: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer les projecteurs spectraux de A.

Exercice 2 (Maîtrise de concepts (5 points)).

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Toute réponse non clairement justifiée ne sera pas considérée.

(1) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2ab \\ 0 & a+b^2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tel que $f^2 - 3f + 2id_E = 0$. Alors f est inversible et diagonalisable.

(3) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors $A^2 = D^2 + \left(2DN + N^2\right)$ est la décomposition de Dunford de A^2.

(4) Le produit de deux matrices nilpotentes est une matrice nilpotente.

(5) Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\det(A) = 1$ et le polynôme caractéristique de A ne s'annule ni en 1 ni en -1. Alors A est diagonalisable.

Exercice 3 (7 points).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

(2) En déduire que A est trigonalisable mais pas diagonalisable et que son spectre est $\{1, 3\}$.

(3) Soit χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $Q_1(X) = \frac{\chi_A(X)}{(X-1)}$ et $Q_3(X) = \frac{\chi_A(X)}{(X-3)^2}$ sont premiers entre eux et trouver deux polynômes U, V tels que

$$U(X)Q_1(X) + V(X)Q_3(X) = 1.$$

(4) Calculer les projecteurs spectraux de A.

(5) Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Montrer que

$$D = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 4 (4 points).

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = \dim \operatorname{Ker}(A^k)$. (par convention, $u_0 = 0$). Montrer que u_k est une suite croissante stationnaire.

(2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. Soit $k \geq 0$ et soit V_k un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f^k)$ dans $\operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Montrer que $f(V_k) \subset \operatorname{Ker}(f^k)$ et

$$f(V_k) \cap \operatorname{Ker}(f^{k-1}) = \{0\},$$

et en déduire que la suite $u_{k+1} - u_k$ est décroissante.

(3) Application: Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente de polynôme minimal X^3. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$.