# Math3A : analyse – L2 S&T

**Exercice 1 : Continuité**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $x_0$ (et on notera parfois $u$ pour désigner une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

De plus $f$ désigne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Rappelez la définition de « *la fonction $f$ est continue au point $x_0$* ».
   *L'écrire avec des quantificateurs.*
2. Démontrer que si $f$ est continue en $x_0$, alors
   $$\forall u \in \mathcal{S}, \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$$
   *Bien que ça soit un résultat que vous connaissez, il est demandé de le redémontrer en vous appuyant sur la définition de la continuité (et de la limite) en terme de quantificateurs.*
3. On souhaite désormais montrer la réciproque, c'est à dire qu'on souhaite montrer la propriété $\mathcal{P}$ suivante : « si pour toute suite $u \in \mathcal{S}$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers $f(x_0)$, alors $f$ est continue en $x_0$ ».
   i) Énoncer la contraposée de cette propriété $\mathcal{P}$.
   *On l'écrira avec des quantificateurs précis, issus des définitions de la continuité et de la limite.*
   ii) En déduire une preuve de cette réciproque.

**Exercice 2 : Rayon de convergence**

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières ci-dessous
   i) $\sum -\dfrac{n+3}{\pi^{(n+3)}} z^n$
   ii) $\sum \dfrac{(-5)^n + 5^{-n}}{(5n^2+2)} z^n$
   iii) $\sum \dfrac{z^{(n^2+1)}}{n!}$
   iv) $\sum \sqrt{\dfrac{n}{3^n}} z^{3n}$
2. Déterminer le rayon de convergence, et exprimer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où les coefficients $a_n$ sont définis (pour $n \in \mathbb{N}$) par $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)(n+2)}$.
   *Indication : on pourra commencer par étudier la série entière* $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} z^n$.

**Exercice 3 : Équation différentielle**

*Dans cet exercice, il n'est pas nécessaire de connaître de théorème sur les équations différentielles.*
*On vous demande de rédiger vos réponses en utilisant les résultats du cours de Math3A, et pas les théorèmes que vous pourriez connaître sur les équations différentielles.*

Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière en 0, qui satisfont

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - \omega^2 f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que les coefficients du développement en série entière de $f$ (au voisinage de 0) satisfont une relation de récurrence.
2. Les conditions « $f(0) = 1$ » et « $f'(0) = 0$ » imposent elle une condition supplémentaire sur les coefficients de la série entière ? Déterminer une expression de tous les coefficients de cette série entière.
3. En déduire la valeur du rayon de convergence, et une expression de la fonction $f$. Vérifier qu'elle satisfait bien $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - \omega^2 f(t) = 0$, $f(0) = 1$, et $f'(0) = 0$.

**Exercice 4 : Série de Bertrand**

On souhaite retrouver dans cette exercice la condition sur les réels $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sous laquelle la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge.

1. On suppose dans un premier temps que $\alpha = 1$ et que $\beta > 0$.
   i) Montrer que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, on a
   $$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^\beta} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k(\ln(k))^\beta}.$$
   On admet que par un changement variable on a l'égalité (valable pour $k \in [\![2, +\infty[\![$) : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} \mathrm{d}x = \int_{\ln k}^{\ln(k+1)} t^{-\beta} \mathrm{d}t$
   ii) en déduire que si $\beta > 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge, tandis que si $\beta \leqslant 1$, alors elle diverge.
   *On pourra traiter le cas $\beta = 1$ séparémment du cas $\beta < 1$.*
2. Si $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un rang à partir du quel $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.
3. Si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un rang à partir du quel $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^2}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.