Université de Bourgogne
Licence 1re année — 2023–2024

24 juin 2024
UFR Sciences et Techniques

Examen session 2 — Compléments de mathématiques, Math2C — Durée : 2h00

Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Tout document est interdit.

Les calculatrices, les téléphones portables ou tout autre dispositif électronique sont interdits.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle :

$$xy' + y = x\cos(x). \tag{A}$$

a) Sans faire de calculs, donner le plus grand intervalle ouvert sur lequel la solution de (A) vérifiant $y(\pi) = 0$ est définie ?

b) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (A).

c) Trouver une solution particulière de (A).

d) Quelle est la solution de (A) satisfaisant à la condition initiale $y(\pi) = 0$?

Exercice 2. Soient A et B des ensembles non vides. Soit $f\colon A \to B$ une application. Montrer que f est surjective si, et seulement si, il existe une application $g\colon B \to A$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Exercice 3. Soient A et B des ensembles non vides et $g\colon A \to B$ une application. On considère des parties $E \subset A$ et $F \subset B$.

a) En utilisant seulement les définitions d'images directe et réciproque d'une partie, montrer l'équivalence : « $E \subset g^{-1}(F) \iff g(E) \subset F$ ».

b) La proposition « $E = g^{-1}(F) \iff g(E) = F$ » est-elle vraie ? Si vous pensez que oui, la démontrer, sinon donner un contre-exemple.

Exercice 4. Dans $I =]0, \infty[$, on cherche les solutions réelles de l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (B).

a) Montrer que l'équation (B) admet une solution de la forme $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \cos(\alpha \ln(x))$ où α est une constante réelle positive que l'on déterminera.

b) Trouver une seconde solution (réelle) y_2 de façon à ce que $\{y_1, y_2\}$ constitue une base de l'espace vectoriel des solutions de (B). *Indication : Posez $y_2(x) = x^\omega$, où $\omega \in \mathbb{C}$.*