Contrôle terminal — Compléments de mathématiques, Math2C — Durée : 2h00

Une attention particulière sera portée à la rédaction.
Tout document est interdit.
Les calculatrices, les téléphones portables ou tout autre dispositif électronique sont interdits.

Exercice 1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 4y' - 5y = 216\, xe^{5x}$. (A)

Exercice 2. Soit équation différentielle

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{1}{4x^2}y = 0. \tag{B}$$

a) Vérifier que $y_1(x) = x^{-1/2}$ est une solution de (B) sur l'intervalle $I =]0, \infty[$.

b) Trouver l'équation différentielle satisfaite par v pour que $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ soit aussi une solution de (B).

c) Intégrer l'équation pour v obtenue en (b) et trouver une seconde solution $y_2 \colon I \to \mathbb{R}$ de (B) linéairement indépendante de y_1.

Exercice 3. Soient A et B des ensembles non vides. Soit $f \colon A \to B$ une application. Montrer que f est injective si, et seulement si, il existe une application $g \colon B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Exercice 4. On considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{si } x < 1\,; \\ \dfrac{2}{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Soit $I = [0, 2[$. Déterminer les ensembles suivants :

$$A = f(I), \qquad B = f^{-1}(f(I)), \qquad C = f^{-1}(I), \qquad D = f(f^{-1}(I)).$$

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < f_n(x) < 2\}, \qquad B_n = \{x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < (f_n(x) - 1)^2 < \frac{1}{4}\}.$$

Déterminer : **a)** $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$; **b)** $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

c) Est-ce que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$?