Université de Bourgogne
Licence 1 Math2A

mercredi 15 mai 2024

Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

IMPORTANT : Pour obtenir les points aux questions, vous devez rédiger de façon rigoureuse les démonstrations et justifier précisément toutes vos affirmations.

Questions de cours (5 pts) Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. Donner la définition de f *est dérivable en* x_0
2. Supposons f et g dérivables en x_0. Démontrer que $f+g$ est dérivable en x_0
3. Supposons que f est dérivable sur I et que sa dérivée est nulle sur I. Que peut-on dire de f ? le démontrer

Exercice 1 (4 pts)
Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ pour :

1. $u_n = -3 \times 2^n + (-\frac{1}{3})^n$
2. $u_n = n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
4. $u_n = \dfrac{n^2 - \cos(n)}{n+2}$

Exercice 2 (4 pts)
Posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

1. Posons $v_n = f_n(1)$. Ecrire v_n en fonction de u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$f_n'(x) = -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$
3. Enoncer le théorème des accroissements finis sur $[0,1]$ pour la fonction f_n
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Suite au verso

Exercice 3 (5 pts)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée
3. Notons g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle I à préciser.
4. La fonction g^{-1}, réciproque de g, est-elle continue sur I ? dérivable sur I ?
5. Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\dfrac{1}{e}$

Exercice 4 (3 pts)
Rappelons que les fonctions hyperboliques cosh et sinh sont définies par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad et \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Soit x un réel strictement positif.

1. Appliquer la formule de Taylor Lagrange pour la fonction cosh à l'ordre 4 sur l'intervalle $[0, x]$.
2. En déduire que $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \leqslant \frac{x^5}{5!}\sinh(x)$
3. En déduire que
$$\frac{433}{384} \leqslant \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$