Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2023-2024
Juin 2024

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1. Rappelons que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, et $\binom{n}{n} = 1$.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Démontrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Question de cours 2. Soient (E) $aZ^2 + bZ + c = 0$ une équation du second degré, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Démontrer que, si $\Delta \neq 0$, alors (E) a exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Rappelons que l'ensemble des parties d'un ensemble E se note $\mathcal{P}(E)$. Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

(1) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(2) Montrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

(3) Donner un exemple où $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. Justifier votre réponse.

Exercice 2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$z_1 = -3\,;\ z_2 = 2 - 2i\,;\ z_3 = 1 - \sqrt{3}i\,;\ z_4 = e^{i\theta} + 1\,,\ \text{où } \theta \in]-\pi, \pi[\,;\ z_5 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i}\,.$$

Exercice 3.

(1) Soit D l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 1 + i| = |z - 2 + i|$. Montrer que D est la médiatrice de deux points A et B que l'on déterminera. Donner une équation complexe de cette droite.

(2) Soit C l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z - 1| = 2$. Montrer que C est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. Donner une équation complexe de ce cercle.