MATH1B

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2023-2024
Janvier 2024

Logique et Algèbre 1
Contrôle terminal

Question de cours 1. Soient (E) $aZ^2 + bZ + c = 0$ une équation du second degré, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Démontrer que, si $\Delta \neq 0$, alors (E) a exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

Question de cours 2.

(1) Donner la définition de *affixe* d'un point M du plan affine et de *affixe* d'un vecteur u du plan vectoriel.

(2) Soient u et u' deux vecteurs du plan vectoriel ayant pour affixes respectives z et z'. Montrer que $\langle u, u' \rangle = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

(3) Soient A et B deux points du plan affine d'affixes respectives z_A et z_B. Montrer que $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad (1+i)Z^2 - (1+i)Z + 2 = 0\,.$$

Exercice 2. Écrire sous forme algébrique, c'est-à-dire sous forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, les nombres complexes suivants :

$$(2-2i)^5\,, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8\,, \quad \frac{(1-i)^{10}}{(i+\sqrt{3})^5}\,.$$

Indication : utiliser la forme exponentielle de ces nombres.

Exercice 3. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \omega + \omega^4$ et $b = \omega^2 + \omega^3$.

(1) Montrer que a et b sont des nombres réels et préciser leurs valeurs.

(2) Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.

(3) Montrer que $a + b = ab = -1$. En déduire que a et b sont les solutions de l'équation

$$Z^2 + Z - 1 = 0\,.$$

(4) En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.