Examen du 17 juin 2024, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Les 5 racines de l'équation $z^5 = 1$ sont appelées « racines 5-ièmes de l'unité ». Elles sont toutes de module 1.

a. Donner les expressions sous forme trigonométrique $e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta \leqslant \pi$, des racines 5-ièmes de l'unité.

b. Montrer qu'il existe une racine 5-ième de l'unité ω telle toute racine 5-ième de l'unité soit une puissance de ω.

2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$. On pose $z = x + iy$. Si le point (x, y) est sur la droite $\mathcal{D}$, quelle relation lie z et $\bar{z}$? On pourra tout d'abord exprimer x et y à l'aide de z et $\bar{z}$.

3. Soit $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction de la variable complexe.

a. En supposant que les fonctions u et v vérifient les bonnes hypothèses, rappeler les conditions de Cauchy-Riemann pour que f soit holomorphe (dans un domaine de $\mathbb{C}$).

b. On pose $u(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1$. Sachant de plus que $f(0) = 1$, déterminer l'expression de $v(x, y)$ pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c. En exprimant x et y à l'aide de z et $\bar{z}$, trouver l'expression de $f(z)$ en fonction de z.

4. Soit g une fonction holomorphe dans un domaine de $\mathbb{C}$.

a. Rappeler la formule de Cauchy pour la dérivée n-ième de g, c'est-à-dire l'expression de $g^n(a)$ à l'aide d'une intégrale curviligne sur un lacet simple de sens positif entourant le nombre complexe a.

b. Soit γ un lacet simple parcouru dans le sens positif, contenant $\frac{\pi}{2}$ dans son intérieur. Que vaut l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz \quad ?$$

5. La fonction $h : z \mapsto \dfrac{1}{2z - 1}$ est analytique en 0.

a. Sans calcul, donner le rayon de convergence du développement de $h(z)$ en série entière à l'origine.

b. Calculer ce développement.

c. Quel est le développement en série entière de $h''(z)$ en 0 ?