Examen du 7 mai 2024, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1.

a. Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, expliquer pourquoi $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.

b. Soit a un nombre complexe de module 0.2 que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} (4i + 10a^n)$?

c. Soit b un nombre complexe de module 0.3 que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} 3^k b^k$?

2. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

On considère la fonction :

$$f : z \mapsto \frac{\cos(z) - z}{z^3}.$$

a. Calculer le développement en série de Laurent de la fonction f au voisinage de 0.

b. Quelle est la nature du point 0 ?

c. Quel est le résidu de f en 0 ?

d. La fonction f est est holomorphe en $\frac{\pi}{2}$, donc développable en série entière en ce point. Sans calcul, donner, en justifiant votre réponse, le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$.

e. Calculer les deux premiers termes de ce développement.

3. Soit γ un lacet simple parcouru dans le sens positif, contenant 1 dans son intérieur. Calculer la valeur de l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_\gamma \frac{2e^z + 3z^3}{(z-1)^3}\, dz.$$

4. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$$

L'objectif de cet exercice est de calculer cette intégrale généralisée en utilisant le théorème des résidus.

a. Expliquer pourquoi l'intégrale généralisée I est convergente.
En déduire que $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$ existe.

b. Donner sous forme trigonométrique les quatre racines complexes de l'équation $z^4 = -1$.

c. Soit R un nombre réel strictement plus grand que 1. On considère le lacet simple γ constitué du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle orienté positivement de centre l'origine et de rayon R. Dessiner ce lacet. Quelles sont les solutions de l'équation $z^4 = -1$ qui se trouvent dans l'intérieur de ce lacet ?

d. Soient z_0 et z_1 les solutions de l'équation $z^4 = -1$ qui se trouvent dans l'intérieur du lacet γ. Calculer les résidus de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^4+1}$ dans les points z_0 et z_1.

e. Que vaut l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$?

f. En déduire la valeur de J puis celle de I.