Université de Bourgogne
L2 MaPC3A

2023/24

Examen

20 décembre 2023 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.

a) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et F un champ de vecteur différentiable $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Donner la définition du jacobien de F et de la divergence de F.

b) Pour $n = 3$ donner la définition du rotationnel de F.

c) Démontrer que si F est deux fois différentiable $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Ex 2. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivante

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \big(\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{x})\big),$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^3 + 9xy^2 + 6y^3 - 3x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Soit D la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x + 2; \quad y = x^2 + 2x,$$

a) Trouver l'aire de D.

b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

Ex 5. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

où D est un quart de disque défini par

$$D = \{(x, y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$