Université de Bourgogne Année 2023-2024
MathPC2A Mai 2024

Epreuve d'algèbre linéaire
Durée : 2h00

Exercice 1. Questions de cours (4 points)
Soit f une application linéaire de E vers F où E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. Pour les 2 questions suivantes indiquer sans le justifier la ou les réponses correctes (ATTENTION une mauvaise réponse entraîne la nullité de la question).

1. Si de plus f est injective (mais elle peut ne pas être surjective) alors nécessairement :

a) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$	b) $\operatorname{Im}(f) = F$
c) $n \leq p$	d) $n > p$
e) $\operatorname{rg}(f) = p$	f) $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$
g) $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$	h) $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker} f) = p$

2. Si de plus f est surjective (mais elle peut ne pas être injective) alors nécessairement :

a) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$	b) $\operatorname{Im}(f) = F$
c) $n < p$	d) $n \geq p$
e) $\operatorname{rg}(f) = p$	f) $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$
g)$\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$	h) $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker} f) = p$

Exercice 2. (4 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -a \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. Pour $a = 4$ indiquer le rang de la matrice A et si elle est inversible.
3. Pour $a = 9$ indiquer le rang de la matrice A et si elle est inversible.

Exercice 3. (4 points)
Soit F le sous-espace engendré par les vecteurs e_1 et e_2 et soit G le sous-espace engendré par les vecteurs e_3, e_4 et e_5 avec

$$e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension de F.
2. Déterminer la dimension de G.
3. Déterminer la dimension de $F + G$.
4. Déterminer si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. (6 points)
On considère l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-4z \\ 2x+5y-6z \\ x+4y-6z \end{pmatrix}.$$

1. Donner sa matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de B.

3. Déterminer une base de chaque espace propre.

4. Montrer que B est diagonalisable.

5. Donner D la matrice de f dans une base constituée de vecteurs propres.

Exercice 5. (5 points)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 les 4 polynômes de E définis par

$$P_1(X) = (X-1)^2(2X+1), \quad P_2(X) = X(X-1)^2, \quad P_3(X) = X^2(-2X+3), \quad P_4(X) = X^2(X-1).$$

1. Donner la dimension de E.
2. Montrer que $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ est une partie libre de E.
3. En déduire que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de E.
4. Déterminer les coordonnées du polynôme P de E dans cette base tel que simultanément

$$P(0) = 2, \qquad P'(0) = 3, \qquad P(1) = 5, \qquad \text{et,} \qquad P'(1) = 7.$$