Contrôle terminal — Session 2

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_n = \frac{n^2 \cos\frac{\pi n}{2} - 3n + 4}{n^2 + 2n + 1}.$$

   (a) Écrire les quatre premiers termes de la suite sans utiliser le symbole "cos". (C'est à dire vous n'êtes pas obligé.e de simplifier autant que possible, juste "cos" ne doit pas apparaitre dans la réponse.)

   (b) Décrire deux suites extraites convergentes de (a_n).

   (c) Décider si (a_n) converge.

2. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n = \dfrac{n^2 - 3\cos(n)}{n-4}$, $b_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n-6}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).

   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ en justifiant les étapes du calcul.

3. Trouver les termes généraux des suites suivantes:

   (a) $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}; a_0 = 5, a_1 = -5$

   (b) $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n; b_0 = b_1 = 2.$

4. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+7}{(1-n)^4}$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 5n^2 + 3\sin(n)}{n^5 + n - 2\cos(n)}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

5. Sans utiliser la théorie des déterminants, calculez $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$. Ensuite, devinez $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ et vérifiez que vous avez bien deviné.

6. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(v) = Av$.
   (a) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$
   (b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Écrire $\mathrm{Im}(f)$ comme espace de solutions d'un système d'équations linéaires.
   (d) Calculer $\mathrm{Im}(f) \cap L$ où L est le sous-espace affine $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vec}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.