Géométrie des courbes et des surfaces

Examen de rattrapage

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (Questions de cours).

(1) Rappeler les définitions des notions soulignées ci-dessous, *telles qu'elles ont été vues en cours* :
(i) <u>enveloppe</u> d'une famille de droites affines $\mathcal{D} = (D_t)_{t \in I}$ indexée par un intervalle ouvert I ;
(ii) <u>droite normale</u> à une courbe paramétrée $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ en un instant $t_0 \in I$;
(iii) <u>centre de courbure</u> $\delta(t_0)$ d'une courbe paramétrée $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ en un instant $t_0 \in I$.
Remarque : pour (ii) et (iii), on précisera bien les hypothèses à faire sur la courbe α.

(2) Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière dont la courbure ne s'annule jamais. Montrer que la courbe paramétrée $\delta : I \to \mathbb{R}^2$ définie par les centres de courbure est l'enveloppe des droites normales à la courbe α. Comment s'appelle la courbe δ ?

On suppose désormais que α est la parabole définie par $\alpha(t) := (t, t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) Calculer la courbure $\kappa(t)$ de α, pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis calculer son centre de courbure $\delta(t)$.

(4) Donner une équation cartésienne de δ, puis esquisser sur un même dessin les courbes α et δ.

Exercice 2 (Courbes de Bertrand). Soit I un intervalle ouvert et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière. On note $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ le repère de Frenet de α, κ sa courbure et τ sa torsion, *dont on suppose qu'elle ne s'annule jamais.* Dans cet exercice, on s'intéresse à la propriété suivante :

$(\mathcal{B})$ « Il existe une autre courbe birégulière $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, distincte de α, qui possède la même droite normale que α à tout instant $t \in I$ ».

(1) Démontrer que, si la courbe α a la propriété $(\mathcal{B})$, alors il existe une fonction $c : I \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + c(t) \cdot \mathrm{N}(t)$ pour tout $t \in I$. Sous cette même hypothèse, calculer $\tilde{\alpha}'$ dans le repère de Frenet $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ de la courbe α, et en déduire que c est constante non-nulle.

(2) Montrer que, si α a la propriété $(\mathcal{B})$, alors il existe des constantes $c \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1 - c\kappa(t)}{\sqrt{\big(1 - c\kappa(t)\big)^2 + \big(c\tau(t)\big)^2}}, \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{c\tau(t)}{\sqrt{\big(1 - c\kappa(t)\big)^2 + \big(c\tau(t)\big)^2}}. \end{cases}$$

Indication : on pourra considérer le vecteur tangent unitaire $\tilde{\mathrm{T}}$ de la courbe $\tilde{\alpha}$ donnée par la propriété $(\mathcal{B})$, montrer que $\langle \mathrm{T}, \tilde{\mathrm{T}} \rangle$ est constante puis utiliser le calcul de $\tilde{\alpha}'$ fait en (1).

(3) Montrer l'implication suivante : si α a la propriété $(\mathcal{B})$, alors il existe des constantes $u \in \mathbb{R}^*$ et $v \in \mathbb{R}$ telles que $u \cdot \kappa(t) + v \cdot \tau(t) = 1$ pour tout $t \in I$.

Indication : on pourra calculer $\mathrm{cotan}(\theta)$ où θ est la constante donnée par la question (2).

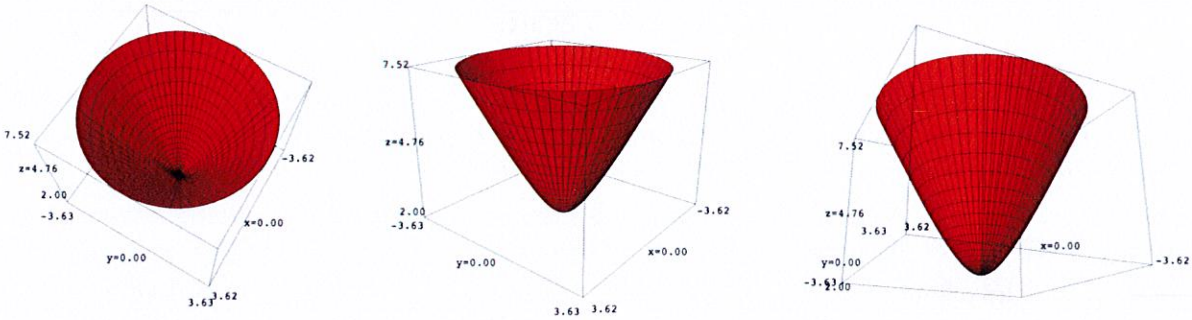
(4) Démontrer la réciproque de l'implication étudiée dans la question (3).

(5) À quelle condition nécessaire et suffisante une hélice α vérifie-t-elle la propriété $(\mathcal{B})$?

Exercice 3 (Étude d'une nappe de l'hyperboloïde circulaire à deux nappes). Soient $a, c \in \mathbb{R}_+^*$ des constantes. On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := \big(a \sinh(u) \cos(v) \, , \, a \sinh(u) \sin(v) \, , \, c \cosh(u) \big)$$

et dont on note $S := \varphi(\mathbb{R}^2)$ le support. Voici des représentations partielles de la surface S pour $(a, c) := (1, 2)$, vue sous des angles différents :



(1) Montrer que S est incluse dans une quadrique, dont on précisera une équation cartésienne.

(2) Montrer que S est une surface régulière (i.e. une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2).

(3) En tant que telle, la nappe paramétrée φ est-elle régulière ?

On fixe maintenant un couple $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, et *on suppose que* $p := \varphi(r, s)$ *est un point régulier* de φ. On pose alors $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s)$.

(4) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(5) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(6) Calculer la courbure de Gauss K_p de S en p.

(7) Soit $q := (0, 0, c) \in \mathbb{R}^3$. Après avoir justifié que la courbure de Gauss K_q de la surface S fait sens en q, calculer la valeur de K_q et en déduire la nature du point q.