Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
Licence Sciences Technologies Santé

Année: 2023 – 2024
Date: 12/06/2024 (Session 2)
Cours: L2 - Elec4A

Examen session 2 – Traitement du Signal

Durée 1h30 – Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.
Cette épreuve continent 10 questions de valeur égale à 2 points chacune.
Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules de rappel fournies en bas de page.

• **Exercice 1** – *Questions génériques*

1.1 La décomposition en série de Fourier est utilisée pour les signaux périodiques ou pour les signaux non-périodiques ?

1.2 Vérifiez si les deux systèmes discrets suivants (avec entrée (e) et sortie (s)) sont des systèmes linéaires et invariants dans le temps: a) $s(t) = e(t) + t$ b) $s[k] = (1 + P[0]))e[k]$.

1.3 Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage que vous choisiriez pour échantillonner un signal, qui a une composante en fréquence maximale f_{max}, sans perte d'information dans sa version discrète ?

• **Exercice 2** – *Représentation et analyse des signaux périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x \sin x$ pour $x \in \ ]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). Pour $n \neq 1$, on note a_n le coeficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coeficient constant et b_n le coeficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f.

2.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in \ ]-2\pi, 2\pi]$.

2.2 Étudiez la parité de f. Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

2.3 Calculer a_n pour les cas $n = 0$ et $n = 1$. Vous pouvez utiliser les formules $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b)$ et l'intégration par parties $\int u dv = uv - \int v du$.

2.4 Calculer a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

• **Exercice 3** – *Représentation et analyse des signaux non périodiques*

Nous allons maintenant étudier le comportement des fenêtres temporelles dans le domaine fréquentiel. Ces fenêtres sont souvent utilisées dans des opérations de convolution comme "passe-haut" et "passe-bas".

3.1 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal porte $f_1(t)$, avec $a = 2$:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; a/2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal $f_2(t)$, avec $a = 2$:

$$f_2(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; 0] \\ -1/a, & \text{si } t \in [0; a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3 Interprétez les spectres des deux fenêtres en indiquant laquelle est un "passe-haut" et "passe-bas".

Quelques rappels utiles :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \text{ et } \cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \ ; \ a_0 = \frac{2}{T}\int_T s(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\,dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \text{ pour } n \geq 1; \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

Bonne épreuve!