Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
Licence Sciences Technologies Santé

Année: 2023 – 2024
Date: 14/05/2024 (Session 1)
Cours: L2 - Elec4A

Contrôle Final – Traitement du Signal

Durée 1h30 – Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.
Cette épreuve continent 12 questions de valeur égale à 2 points chacune, dont 2 items sont des bonus.
Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules de rappel fournies en deuxième page.

• **Exercice 1** – *Echantillonnage des signaux*

1.1 Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage que vous choisiriez pour échantillonner un signal, qui a une composante en fréquence maximale f_{max}, sans perte d'information dans sa version discrète ?

1.2 Soient $f_2 > f_1 > 0$, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage pour le signal $s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$.

1.3 Idem pour le signal $s(t) = \sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t)$.

• **Exercice 2** – *Représentation et analyse des signaux périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in \,]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). L'operateur $|.|$ est le module ou norm L_1 tel que pour un scalaire réel t :

$$|t| \quad = \quad \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0, \\ -t, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \neq 1$, on note a_n le coeficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coeficient constant et b_n le coeficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f.

2.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in \,]-3\pi, 3\pi]$.

2.2 Étudiez la parité de f.

2.3 Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

2.4 Calculer a_n pour les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules en bas de page et l'intégration par parties $\int udv = uv - \int vdu$.

2.5 Calculer a_n pour n pair, soit $n = 2k$.

2.6 Calculer a_n pour n impair, soit $n = 2k + 1$.

• **Exercice 3** – *Représentation et analyse des signaux non périodiques*

Nous allons maintenant étudier le comportement des fenêtres temporelles dans le domaine fréquentiel. Ces fenêtres sont souvent utilisées dans des opérations de convolution comme "passe-haut" et "passe-bas".

3.1 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal porte $f_1(t)$, avec $a = 1$:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; a/2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2 Calculer la représentation fréquentielle (spectre) du signal $f_2(t)$, avec $a = 1$:

$$f_2(t) = \begin{cases} 1/a, & \text{si } t \in [-a/2; 0] \\ -1/a, & \text{si } t \in [0; a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3 Tracer les deux spectres des deux fenêtres. Interprétez ces spectres en indiquant quelle fenêtre correspond à un “passe-haut” et “passe-bas”.

Quelques rappels utiles :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \ ; \ \cos p - \cos q = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \ ;$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b) \ ; \ 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b) \ ;$$
$$a_0 = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\,dx \ ; \ a_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\,dx \text{ et } b_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \text{ pour } n \geq 1;$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

Bonne épreuve!