Durée 2h, tous documents autorisés
Le baréme est donné à titre indicatif

Exercice 1 : Questions de cours (7 pts)

Donnez une réponse synthétique aux questions suivantes (deux lignes maximum).

1. Quelle est la condition d'existence d'une racine de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[x_G\ ,x_D]$?
2. Peut-on utiliser la fonction exponentielle dans le cadre d'une approximation linéaire ?
3. Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires ?
4. Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU ?
5. Existe-t-il une ou plusieurs méthodes numériques permettant de résoudre l'équation f (x) = a ? et, si oui, citez en une.
6. Quel est l'ordre du modèle SIR ?
7. Pourquoi doit-on parfois intégrer numériquement une fonction ?
8. Citez deux méthodes de résolution d'équations non linéaires.
9. Quelle astuce algorithmique permet de réutiliser les calculs antérieurs lors des itérations de la méthode des trapèzes ?

Exercice 2 : Système linéaire (5)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 45 \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 17 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

1. Donner la mise en équation du système sous la forme **Ax=b**. Préciser A et b.
2. En utilisant la méthode de décomposition LU, donner la soultion du système.

Exercice 3 : Recherche de racines (8)

On veut résoudre l'équation $e^x = x + 1$ qui correspond à l'intersection entre la courbe de la fonction $h(x) = e^x$ et la droite $g(x) = x + 1$.

Soit la fonction $\varphi(x) = e^x - 1$.

1. Monter que l'équation $\varphi(x) = x$ a la même solution que $h(x) = g(x)$? Détaillez vos réponses.
2. Vérifiez que la solution de $\varphi(x) = x$ se trouve dans l'intervale [-1, 1] ? (justifier)
3. Dans quelle(s) condtitions(s)la méthode de Newton ne peut pas être utiliser ?
4. Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 3 itérations à partir de $x_0 = -1$ sur la fonction $f(x) = e^x - x - 1$.
5. Avec quelle méthode de recherche de racines la fonction φ est utilisée ?
6. Faites deux itérations en utilisant cette méthde pour trouver la racine de $f(x) = 0$ sur [-1, 1].