

Examen du 22 mai 2024

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (6) :
Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
(b) Calculer les coefficients de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
(c) En conclure la décroissance des coefficients pour $n \rightarrow \infty$.
(d) Donner la somme de la série pour $x = 0$.

2. *Équation de Poisson* (8) :

- (a) Résoudre analytiquement pour $x \in [-1, 1]$ l'équation

$$u''(x) - u(x) = x^2, \quad u(1) = -3, \quad u'(-1) = 2. \quad (1)$$

- (b) Écrire un code en Matlab pour calculer la solution de (1) numériquement. Utiliser le code `cheb.m` pour les matrices de différenciation. Prendre $N = 32$ polynômes, donner le graphe de la solution, calculer la norme de la différence avec la solution exacte.

3. *Stabilité* : (4)

Pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, la méthode d'Euler implicite prend la forme

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})),$$

où on applique la discrétisation $t = t_0, t_1, t_2, \dots$ et où $t_{n+1} - t_n = h$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Donner le domaine de stabilité. La méthode est-elle A-stable ?

Indication : Étudier l'équation $y'(t) = \lambda y(t)$, où la constante $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\Re \lambda < 0$. Discuter le domaine de stabilité dans le plan complexe de $z = h\lambda$.

Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout \mathbb{R} . En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x, 0) = f(x)$ ou $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Identifier les caractéristiques.

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

4. *Equation de transport* (3) :
L'équation de transport prend la forme