Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Examen - 11 janvier 2024
durée : 2h

Notations. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est notée λ_2. Pour alléger les notations on notera indifféremment $\mathrm{d}x$ à la place de $\mathrm{d}\lambda(x)$, et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la place de $\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

Vous rédigerez vos exercices sur deux copies séparées :

exercices 1 et 2 sur une copie, exercices 3 et 4 sur une autre.

Citez les théorèmes du cours utilisés, en justifiant les hypothèses.

Exercice 1. (Petites questions proches du cours).

1. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.
   (a) Soit $A \in \mathscr{M}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{1}_A$ soit intégrable par rapport à μ.
   (b) Soit $A_1, A_2, \dots, A_p$ des sous ensembles mesurables de X et $a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels **quelconques**. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi = \sum_{k=1}^{p} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ soit intégrable par rapport à μ, et lorsque c'est le cas, préciser l'intégrale de φ.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $t \geq 0$, on note $m_t = \inf\{f(x) : |x| \geq t\}$.
   En raisonnant par l'absurde montrer que si f est intégrable par rapport à λ, alors $m_t = 0$ pour tout $t \geq 0$. (*Indication : on pourra décomposer* $\mathbb{R}$ *en* $(\mathbb{R} \setminus]-t,t[) \cup [-t,t]$).
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \big(1 + \cos(\pi x)\big)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g_n(x) = \sqrt{n}\, g\big(n^2(x-n)\big)$.
   (a) Calculer $\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\lambda$ puis $\int_{\mathbb{R}} g_n \,\mathrm{d}\lambda$.
   (b) On pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} g_n(x)$. Montrer que F est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à λ.
   (c) Montrer cependant que $\sup\{F(x) : |x| \geq t\} = +\infty$ pour tout $t \geq 0$.
4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.
   (a) Déterminer la limite $f(x)$ de la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in [0;1]$.
   (b) Calculer $\int_{[0;1]} f_n \,\mathrm{d}\lambda$ et $\int_{[0;1]} f \,\mathrm{d}\lambda$.
   (c) On observe que $\lim_{n\to\infty} \int_{[0;1]} f_n \,\mathrm{d}\lambda \neq \int_{[0;1]} f \,\mathrm{d}\lambda$. Comment expliquez-vous ce résultat ?

***

Exercice 2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ (*indication : développer* $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ *en série pour* $x > 0$).

Changez de copie !

Exercice 3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_{]0;1[} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de convergence de l'intégrale définissant f.
2. Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.
3. En calculant $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$, montrer que $f(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0.
4. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. Représenter f graphiquement.

***

Exercice 4. Pour tout réel t strictement positif, on pose $h(t) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale définissant h est convergente.
2. On fixe $t > 0$. Montrer que la fonction $H_t : (x,y) \mapsto \sin(xy)\,\mathrm{e}^{-tx}$ est intégrable sur $B = [0;+\infty[\times [0,1]$.
3. En calculant $\int_B H_t \,\mathrm{d}\lambda_2$ de deux façons en utilisant le théorème de Fubini, montrer que $h(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln(t)$.