CALCUL DIFFÉRENTIEL - EXAMEN (2h)

I

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = 2yz - x^3 + 3xz^2$.

1. En quels points l'ensemble $\mathcal{S} = f^{-1}(\{0\})$ est-il une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit $A = (u,v,w)$ l'un des points de la question précédente. Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point A.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{P}_a$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\{z = a\}$ et on pose $\mathcal{C}_a = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_a$. En quels points l'ensemble $\mathcal{C}_a$ est-il une courbe de $\mathbb{R}^3$?
4. Pour $a \neq 0$, donner un paramétrage $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}_a$ et en déduire, pour pout $t \in \mathbb{R}$, une description de l'espace tangent $T_B\mathcal{C}_a$ au point $B = \gamma(t) \in \mathcal{C}_a$.

II

On considère trois nombres réels strictement positifs α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et la fonction $f : (x,y,z) \mapsto x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

1. Montrer que l'ensemble
$$K = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 1\right\}$$
est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la fonction f admet un unique extremum sur la variété
$$V = \left\{(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0\right\},$$
et que la valeur de f en cet extremum est 1.
3. En déduire que la valeur maximale de f sur K est 1, et que, pour $x, y, z \geq 0$, on a
$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \leq \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

III

Sur l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, on note $u \cdot v$ le produit scalaire euclidien de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$. On appelle $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit A une matrice symétrique de taille n (on rappelle qu'une matrice symétrique A vérifie $Au \cdot v = u \cdot Av$ pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$).

1. Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = Ax \cdot x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer $\mathrm{d}_x f(h)$ pour tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ (on pourra utiliser la symétrie de A pour simplifier le résultat).
2. Rappeler pourquoi f est bornée sur la sphère unité $\mathcal{S}$ et atteint son maximum et son minimum sur $\mathcal{S}$.
3. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
4. Soit $a \in \mathcal{S}$ un point en lequel f atteint son maximum sur $\mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent $T_a\mathcal{S}$ à $\mathcal{S}$ au point a et donner un vecteur orthogonal à ce plan.
5. A l'aide des questions précédentes, montrer que les vecteurs a et Aa sont colinéaires (c'est à dire que a est un vecteur propre de A).
6. Déduire de ces questions que A admet une base orthonormée de vecteurs propres.