L3 Analyse Numérique (2023/24)
Session 2 (28 juin 2024, 9h00)

Temps : 3h00

1. (Décomposition LU) **[6 points]**

   Étant données les matrices :

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

   i) Donner la décomposition LU de chaque matrice Δ_2 et Δ_3. **[2 points]**

   ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour garantir l'unicité de la décomposition LU (sans permutation) de Δ_3. **[2 points]**

   iii) Énoncer la notion de matrice définie positive. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Δ_2 et Δ_3 sont définies positives. **[2 points]**

4. (*Conditionnement*) **[3 points]**

   i) On considère $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et b et $\delta_b \in \mathbb{R}^n$, avec $b \neq 0$. Si x et $(x + \delta_x) \in \mathbb{R}^n$ sont, respectivement, solutions de

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A(x + \delta_x) &= b + \delta_b \ , \end{aligned}$$

   montrer

$$\frac{||\delta_x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{||\delta_b||}{||b||}$$

   [2 points]

   ii) Étant donnée une matrice orthogonale Q, on accepte que le conditionnement associé à la norme induite $||\cdot||_2$ satisfait $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$. On considère une application linéaire $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et deux bases orthonormées B et B' de $\mathbb{R}^n$. Si on note par M et M' les matrices de $\mathcal{M}$ dans B et B', respectivement, montrer que $\mathrm{cond}_2(M) = \mathrm{cond}_2(M')$. **[1 point]**

3. (Méthodes itératives) **[7.5 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

   i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectral $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$. **[1 point]**

   ii) On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \ .$$

   a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[3 point]**, Jacobi **[1.5 point]** et Gauss-Seidel **[1.5 point]**.

   b) Dans l'ensemble de valeurs de a pour lesquelles les trois méthodes convergent, quel est le classement de ces méthodes en fonction de leur vitesse de convergence respective ? **[0.5 points]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[3.5 points]**

   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[1.5 point]**

   ii) Étant donné $a \in \mathbb{R}$ fixe, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1 point]** :

$$\begin{cases} r\cos\theta = a \\ r\sin\theta = 0 \end{cases}$$

   iii) Discuter la convergence de l'algorithme si $a = 1$ et si $a = 0$. **[1 point]**