2023/24

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (12 janvier 2024)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR) [**4 points**]

   i) Énoncer le théorème de décomposition QR d'une matrice. [**1 point**]

   ii) Démontrer le théorème de décomposition QR (existence et unicité) d'une matrice. [**2 points**]

   iii) Étant donnée la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} ,$$

   écrire sa décomposition QR. [**1 points**]

2. (Méthodes itératives) [**5 points**]
   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$ arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} .$$

   i) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson [**2 points**], Jacobi [**0.5 point**] et Gauss-Seidel [**0.5 point**].

   ii) Si on considère la norme $||\cdot||_2$, expliciter la norme $||B||_2$ pour :

      a) Les matrices B_R et B_J correspondantes aux méthodes de Richardson et Jacobi, respectivement, pour les cas convergents déterminés dans i). [**1 point**]

      b) La matrice B_{G-S} correspondante à la méthode de Gauss-Seidel. [**1 point**]

3. (Systèmes non-linéaires) [**4 points**]

   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. [**2 points**]

   ii) Étant donné $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixes, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système [**1 point**] :

$$\begin{cases} r \sin\theta \cos\varphi = a \\ r \sin\theta \sin\varphi = b \\ r \cos\theta = c \end{cases}$$

   iii) Discuter la convergence de l'algorithme en fonction des valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$. [**1 point**]

2. (Stabilité et calcul de valeurs propres) **[7 points]**

   i) (Stabilité).

      ii.a) Énoncer le théorème des cercles de Gershgorine. **[0.5 points]**

      ii.b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer et démontrer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $|| \cdot ||_\infty$ de C. **[2.5 points]**

   ii) (Calcul de valeurs propres par Newton-Raphson).
   Considérons $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre simple de A et $v \in R^n$ un vecteur propre associé à μ tel que $||v||_2 = 1$.

      ii.a) Écrire le système sous la forme $F(x, \lambda) = 0$ où F est une fonction de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. En déduire la méthode de Newton-Raphson associé à ce problème. **[2 points]**

      ii.b) Calculer ∇F et montrer que la solution est bien définie et que la suite converge localement. **[2 points]**