Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3 : 2023 - 2024

Analyse fonctionnelle

Examen terminal

Durée : 3h

Exercice 1. On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction impaire, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Questions préliminaires :
   (a) Montrer que
   $$\begin{cases} \sin x \geq \frac{2}{\pi} x & \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et} \\ \sin x \geq 2 - \frac{2}{\pi} x & \forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.
   (c) Soit g_n la fonction définie sur $[0, \pi]$ par
   $$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2n \sin(\frac{x}{2n})} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   Déduire des questions précédentes que la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction g que l'on précisera.
2. Calculer la série de Fourier de f et prouver qu'elle converge simplement vers f. Y-a-t-il convergence uniforme ?
3. Soit S_n la $2n-1$-ième somme partielle de la série de Fourier de f,
   $$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$
   Justifier que S_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vérifie
   $$S_n'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ \frac{(-1)^q 4n}{\pi} & \text{si } x = q\pi,\ q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
   En déduire que S_n présente $(2n-1)$ extrema locaux sur l'intervalle $]0, \pi[$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum et qu'il est atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$.
4. On posera pour la suite $a_n = S_n(x_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi[$, on a
   $$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt.$$
   (b) En déduire que $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{2n \sin(\frac{t}{2n})} dt$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{2}$.

Remarque : Le fait que $\max S_n > \frac{\pi}{2} > 1 = \max f$ s'appelle le *phénomène de Gibbs* et a des conséquences en traitement du signal.

Exercice 2. *Question préliminaire* : Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé et φ et ψ deux formes linéaires continues sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $Ker\varphi = Ker\psi$.

b) φ est proportionnelle à ψ.

Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $u : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux [1]. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\int_0^1 u(t)(f(t))^2 dt \geq 0 \quad \forall f \in E$.
   (ii) $\int_0^1 u(t)(f(t))^2 dt \geq 0 \quad \forall f \in L^2([0,1])$.
   (iii) $u(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1[$.
   (Indication : pour l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, penser au théorème de densité et pour l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$, vous pourriez fixer $t \in [0,1[$ et considérer la fonction caractéristique de l'intervalle $[t,1]$)
2. Soit $u : [0,1] \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux. On dira que u est *convenable* si $u^{-1}(0) := \{t \in [0,1] : \quad u(t) = 0\}$ est d'interieur vide.
   (a) Montrer que si u est convenable alors la forme bilinéaire symétrique
   $$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_u := \int_0^1 u(t)f(t)g(t)dt \qquad (1)$$
   définit un produit scalaire sur E. Que peut-on dire de la réciproque ? Justifiez votre réponse.
   (b) Soient u et v deux fonctions convenables. Notons $\|\cdot\|_u$ et $\|\cdot\|_v$ les normes associées à $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_v$ respectivement. Montrer que $\|\cdot\|_u$ et $\|\cdot\|_v$ sont équivalentes si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que
   $$\alpha v \leq u \leq \beta v.$$
   (Indication : penser à utiliser la question 1))
   (c) On suppose que $\gamma := \inf_{t\in[0,1]} u(t) > 0$. Montrer que l'application linéaire $\varphi : (E, \|\cdot\|_u) \mapsto \mathbb{R}$ définie par
   $$\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$$
   est continue.
   (d) On pose $H = Ker\varphi$.
   (i) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel fermé dans $(E, \|\cdot\|_u)$.
   (ii) Montrer que l'espace ortogonal $H^\perp$ à H dans E est réduit à $\{0\}$. *(Indication : Vous pourriez prendre $g \in H^\perp$, avec g continue, et considérer la forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 u(t)f(t)g(t)dt$ et utiliser la question préliminaire)*
   (iii) L'espace $(E, \|\cdot\|_u)$ est-il complet ? Justifiez.
   (e) Supposons maintenant que φ est définie sur $L^2([0,1])$. Déterminer le sous-espace orthogonal $H^\perp$ de H dans $L^2([0,1])$.

1. On rappelle qu'une fonction $h : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ telle que sa restriction à tout intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ coïncide avec une fonction u_i continue sur le segment fermé $[a_i, a_{i+1}]$. Dans le cas particulier où les fonctions u_i sont constantes, on dit que u est une fonction en escalier.