Algèbre linéaire et bilinéaire – L3

Durée : 3h

Exercice 1. (4 points) Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

(a) Toute matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ est trigonalisable.

(b) Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie. Alors $\dim(F) + \dim(E/F) = \dim(E)$ pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$.

(c) Soient A et B deux matrices semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Si A est nilpotente, alors B est nilpotente.

(d) Soient A, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Si A et B sont nilpotentes alors A et B sont semblables.

Exercice 2. (4 points) Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que A et B sont diagonalisables et commutent.

(ii) Déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont des matrices diagonales.

Exercice 3. (6 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer la réduction de Jordan J de A.

(ii) Déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = J$.

(iii) Déterminer les invariants de similitude et la réduction de Frobenius de A.

TOURNER S.V.P.

Exercice 4. (6 points) Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la forme linéaire φ_A sur $M_n(\mathbb{C})$ par

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \quad \varphi_A(X) = \mathrm{tr}(AX).$$

(i) Montrer que l'application $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})^*$ définie par $f(A) = \varphi_A$ est un isomorphisme. (Indication : montrer que si $\varphi_A(E_{ij}) = 0$ pour toute matrice élémentaire E_{ij}, alors $\mathrm{tr}(A) = 0$.)

(ii) Soit $\psi \in M_n(\mathbb{C})^*$ une forme linéaire telle que $\psi(XY) = \psi(YX)$ pour tout X, $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\psi(X) = \lambda.\mathrm{tr}(X)$ pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$. (Indication : calculer $\psi(E_{ij}.E_{j\ell})$ pour tout i, j, ℓ.)

(iii) Soit $H \subset M_2(\mathbb{C})$ un hyperplan. Montrer que $H \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \neq \varnothing$. (Indication : on pourrait utiliser la partie (i).)