Examen du 16 mai 2024 – durée 3h

Exercice 1. Soit $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Considérons le groupe abélien $K = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ est de cardinal 48.
2. Quel est l'indice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$? En déduire le cardinal de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
3. Montrer qu'un automorphisme φ de K détermine une unique matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.
4. Donner deux sous groupes distincts de cardinal 3 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
5. Quel est le nombre de 3-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$?
6. Majorer aussi précisément que possible le nombre de groupes non-isomorphes de la forme $K \rtimes \mathbb{F}_3$.
7. Soit X l'ensemble des quatre droites du $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel K engendrées par les quatre vecteurs :
$$u = (1,0), \quad v = (1,1), \quad w = (2,1), \quad z = (0,1), \qquad \text{donc } X = \{\mathbb{F}_3 u, \mathbb{F}_3 v, \mathbb{F}_3 w, \mathbb{F}_3 z\}.$$
Les entiers ici sont considérés modulo 3. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ opère sur X de manière transitive.
8. En déduire une morphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$ dont le noyau est le centre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
9. *(Bonus).* Que peut-on dire de l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$?

Exercice 2 (Questions de cours). *On pourra utiliser la classification des groupes abéliens de type fini.*

1. Donner la définition de « groupe simple » puis dire quels groupes abéliens de type fini sont simples.
2. Soit p un nombre premier. Rappeler la notion de p-groupe puis dire quels sont les p-groupes simples.
3. Soit G un groupe de cardinal $2m$, m impair. Est-ce que G est simple ?
4. Pour tout $n \in \{2,3,4\}$, dire si $\mathfrak{A}_n$ est simple en justifiant pourquoi.
5. Dresser la liste des classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$ et de leurs cardinaux.
6. Soit C une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$, $\sigma \in C$.
   (a) Montrer que $C \subset \mathfrak{A}_5$ ou $C \cap \mathfrak{A}_5 = \varnothing$.
   (b) Soit $D = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in \mathfrak{A}_5\}$, σ étant un k-cycle. Montrer que $C \neq D$ si $k = 5$ et $C = D$ si $k = 3$.
7. Montrer qu'un sous groupe normal $H \subsetneq \mathfrak{A}_5$ est réduit à l'élément neutre.

Exercice 3. Soit K le sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ contenant tous les éléments d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Montrer que K est abélien et normal dans $\mathfrak{S}_4$.
3. Rappeler la définition de groupe résoluble puis déduire que $\mathfrak{S}_4$ est un groupe résoluble.
4. Dire si les groupes suivants sont résolubles :
   — Le groupe diédral de cardinal $2n$, $n \geq 2$.
   — Le groupe $\mathbb{H}_8$ des quaternions, de cardinal 8.
   — Le groupe $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier centré à l'origine de $\mathbb{R}^3$. On note F l'ensemble des faces de $\mathcal{T}$ et S l'ensemble des sommets. On note G le sous-groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ laissant $\mathcal{T}$ globalement invariant, et G_+ le sous-groupe de G formé des isométries vectorielles conservant l'orientation. Les groupes G et G_+ agissent transitivement sur T et S.

(1) En utilisant l'action de G sur S, montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
(2) En déduire que G_+ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
(3) On se donne une palette de 6 couleurs Γ = {violet,bleu,vert,jaune,orange,rouge}. Un coloriage du tétraèdre est une application $c : F \to \Gamma$ qui associe une couleur à chaque face ; on note X est l'ensemble des coloriages.
   (a) Montrer que $G_+ \times X \to X$, $(g,c) \mapsto c \circ g^{-1}$ est une action de groupe.
   (b) Deux coloriages sont considérés comme identiques s'ils sont dans la même orbite. En utilisant la formule de Burnside, calculer le nombre de coloriages différents du tétraèdre obtenus pour cette action.