Université de Bourgogne Année 2021-2022
Topologie des espaces métriques 5 janvier

Contrôle terminal – 3h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.
Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sera muni de sa distance usuelle et (E, d) et (F, d') seront deux espaces métriques non-vides.

Exercice 1.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe x^n. Décrire les deux ensembles suivants (en les écrivant comme une union finie d'intervalles ou comme l'ensemble vide).

$$\textbf{1)}\ A = \bigcap_{M \in \mathbb{R}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq N} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |f_n(x)| \leq M\}, \qquad \textbf{2)}\ B = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq N} \bigcup_{M \in \mathbb{R}_+^*} \{x \in \mathbb{R}\,;\, |f_n(x)| \leq M\}.$$

Exercice 2.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E. Soit $x \in E$. Montrer que les trois caractérisations suivantes de "x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$" sont équivalentes.
1) Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq N$ tel que $d(x, x_n) < \epsilon$.
2) Il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x.
3) $x \in \cap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n\,;\, n \geq k\}}$.

Exercice 3.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.
1) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, c-à-d que $\sup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} d(x_n, x_m)$ est fini.
2) Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence dans E alors cette suite converge.
3) Soit $g\colon E \to F$ une application uniformément continue.
a) Montrer que $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F.
b) Montrer que si l'on suppose en plus que (F, d') est complet et que g est bijective, d'application réciproque continue alors (E, d) est complet.

Exercice 4.
On équipe l'ensemble $E \times F$ d'une distance produit. Montrer que $E \times F$ est connexe par arcs si et seulement si E et F sont connexes par arcs.

Exercice 5.
Soit $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la distance d_∞ de la convergence uniforme : si $f_1, f_2 \in X$ alors

$$d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x \in [0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère $\phi\colon X \to X$ définie par $\phi(f) := h \circ f$.
1) Montrer que si h est uniformément continue alors ϕ est une application continue.
2) Ce résultat reste-t-il valable si h n'est supposée que continue ? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 6.

La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2}$. Si $u, v \in \mathbb{R}^2$ alors on définit la distance SNCF entre u et v par

$$d(u,v) = \begin{cases} \|u-v\|_2 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires,} \\ \|u\|_2 + \|v\|_2 & \text{si } u \text{ et } v \text{ ne sont pas colinéaires.} \end{cases}$$

1) L'application f de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ définie par $f(x,y) = x$ est-elle continue ?
2) L'application g de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, d)$ définie par $g(x) = (x, 1)$ est-elle continue ?
3) L'ensemble $[0,1]^2$ est-il un connexe de $(\mathbb{R}^2, d)$?
4) L'ensemble $[0,1]^2$ est-il un compact de $(\mathbb{R}^2, d)$?