Licence de Mathématiques

2021-2022

Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités

Année : L3

Date : 17 Mai 2022

Examen

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

▷ **1)** On pose $X = \min(U, V)$ et $Y = \max(U, V)$: déterminer la loi et l'espérance de X.

▷ **2)** Déterminer la loi de Y.

▷ **3)** Exprimer $X + Y$ en fonction de U et V . En déduire l'espérance de Y.

▷ **4)** Calculer de même XY et en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

▷ **1)** Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de n tels que $X_n = 1$.

▷ **2)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \dots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer que presque sûrement il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui sont réalisés.

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

▷ **1)** Montrer que $(S_n/n^{3/2})$ converge en probabilités vers 0.

▷ **2)** Montrer que (S_{n^2}/n^3) converge presque sûrement vers 0.

Problème 1 (Répartition des tâches) : Un problème important en informatique est de répartir un grand nombre de tâches entre des processeurs parallèles de manière équitable, c'est-à-dire d'équilibrer leur charges. Nous allons étudier ce problème sur l'exemple d'un modèle basé sur de l'aléatoire.

Soient $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. La variable X_k correspond au temps d'exécution de la $k^{\text{ième}}$ tâche à effectuer par un processeur. Un partage de tâches sera représenté par une suite d'entiers $a_1, \dots, a_N$ où chaque a_k est à valeurs dans $\{-1, +1\}$ de telle sorte que $a_k = 1$ si la k $k^{\text{ième}}$ tâche est affectée au processeur numéro 1 et $a_k = -1$ si elle est affectée au processeur numéro 2.

On suppose ici que l'on ne connaît pas forcément à l'avance le nombre de tâches à traiter, celles-ci étant affectées à un processeur au fur et à mesure de leur arrivée. On décide d'attribuer les tâches sur les deux processeurs "au hasard" : pour $k \in \{1, 2, \dots N\}$, la $k^{\text{ième}}$ tâche est affectée à l'un des deux processeurs avec la probabilité $1/2$, indépendamment des autres tâches et indépendamment des temps d'exécution des tâches.

▷ **1)** Calculer, en justifiant chaque étape, $\mathbb{E}[a_1 X_1]$.

▷ **2)** Déterminer la loi de $a_1 X_1$.

▷ **3)** Calculer la variance de $a_1 X_1$.

▷ **4)** Déterminer la fonction caractéristique de $a_1 X_1$.

La différence de charge entre les deux processeurs lorsque l'on a réparti N tâches est donnée en valeur absolue par la quantité $|D_N|$ où

$$D_N = \sum_{k=1}^{N} a_k X_k.$$

Plus D_N est proche de zéro, plus la répartition est équilibrée.

▷ **5)** Déterminer la fonction caractéristique de D_N.

▷ **6)** Justifier que D_N/N converge presque-sûrement vers 0.

▷ **7)** Justifier que $D_N/\sqrt{N}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y. Donner la loi de Y.

▷ **8)** Que pensez-vous de cette méthode ? Proposez une meilleure méthode.

Problème 2 (Au casino) : Le gérant d'un casino s'intéresse à l'évolution de son capital en fonction du temps. Il souhaite en particulier étudier la probabilité qu'il puisse un jour être ruiné. Pour cela, il construit un modèle lui permettant de connaître ce risque.

Il suppose que les rentrées d'argent d'un casino (c'est-à-dire les dépenses des clients) sont déterministes et gouvernées par un paramètre $\alpha > 0$: entre les instants 0 et t, le casino gagne αt. il suppose que les durées séparant les gains des joueurs sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, notées $(\xi_k)_{k\geq 1}$ de loi exponentielle de paramètre 1. Les gains sont donnés par une suite de variables aléatoires strictement positives $(X_i)_{i\geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes des $(\xi_k)_{k\geq 1}$.

▷ **1)** Que représente $X_k - \alpha\xi_k$?

On définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \alpha\xi_k)$$

▷ **2)** Justifier l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\}\right)$$

▷ **3)** Justifier l'égalité :

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{k\geq n} \left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} > 1\right\}\right)$$

▷ **4)** Justifier l'inégalité :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{k\geq n} \left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} > 1\right\}\right) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right)$$

▷ **5)** Justifier l'inégalité :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right) > 0.$$