L3 MATHS

Contrôle : Statistique inférentielle

Patrick Tardivel, Université de Bourgogne

21/06/2022

Exercice 1 (2,5 points). *Le cèpe des pins de montagne et le cèpe de Bordeaux sont des champignons relativement similaires. On souhaite savoir si les poids moyens de ces deux variétés sont significativement différents. Faire un test statistique au niveau 5% pour conclure en rédigeant soigneusement chaque étape.*
Données : *On a pesé 120 cèpes des pins de montagne dont les poids sont* $x_1, x_2, \ldots, x_{120}$. *On a obtenu les résultats suivants :*

$$\sum_{i=1}^{120} x_i = 11784 \text{ et } \sum_{i=1}^{120} x_i^2 = 1168236.$$

On a pesé 95 cèpes de Bordeaux dont les poids sont $y_1, y_2, \ldots, y_{95}$. *On a obtenu les résultats suivants :*

$$\sum_{i=1}^{95} y_i = 8642 \text{ et } \sum_{i=1}^{95} y_i^2 = 793547.$$

Indication : *On pourra utiliser la statistique*

$$Z := \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{S_X^2/n_1 + S_Y^2/n_2}}.$$

Vous donnerez la signification de chaque lettre. Certaines des données suivantes sont pertinentes pour effectuer ce test :

— *Pour une loi de Student 214 degrés de liberté on a*

Ordre du quantile	0,90	0,95	0,975	0,99
Quantile	1,286	1,652	1,971	2,344

— *Pour une loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *on a*

Ordre du quantile	0,90	0,95	0,975	0,99
Quantile	1,282	1,645	1,960	2,326

— *Pour une loi de Fisher à* $(119, 94)$ *degrés de liberté on a*

Ordre du quantile	0,90	0,95	0,975	0,99
Quantile	1,289	1,386	1,475	1,589

Exercice 2 (2,5 points). *Un enseignant a fait un contrôle dont les notes sont données dans le tableau suivant :*

Notes	*4*	*13*	*11*	*7*	*9*	*9*	*11*	*7*	*5*	*7*

Est-ce que la moyenne des notes est significativement inférieure à 10 ? Faire un test statistique au niveau 5% pour conclure en rédigeant soigneusement chaque étape.
Indication : *On pourra utiliser la statistique*

$$T := \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{S_{corr}^2/n}}$$

Vous donnerez la signification de chaque lettre. Certaines des données suivantes sont pertinentes pour effectuer ce test :

— *Pour une loi de Student 10 degrés de liberté on a*

Ordre du quantile	0,10	0,05	0,025	0,01
Quantile	−1,372	−1,812	−2,228	−2,764

— *Pour une loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *on a*

Ordre du quantile	0,10	0,05	0,025	0,01
Quantile	−1,282	−1,645	−1,960	−2,326

— *Pour une loi de Student à 9 degrés de liberté on a*

Ordre du quantile	$0,10$	$0,05$	$0,025$	$0,01$
Quantile	$-1,383$	$-1,833$	$-2,262$	$-2,821$

Exercice 3. *(4 points) On souhaite savoir si des consommateurs font la différence au goût entre deux marques de boisson gazeuse. On fait goûter chaque boisson au consommateur puis on refait une dernière dégustation à l'aveugle et on vérifie si le consommateur retrouve la bonne marque. On pose p la probabilité inconnue qu'un consommateur retrouve la bonne marque à l'aveugle. Sur les 19 consommateurs il y a 15 consommateurs qui, à l'aveugle, ont retrouvé la bonne marque. D'après ces données, est-ce que les consommateurs font significativement la différence entre le goût des deux marques de boisson gazeuse ?*

1. *Faire un test statistique au niveau 5% pour conclure en rédigeant soigneusement chaque étape.*
2. *Calculer la p-valeur.*
3. *Calculer la puissance de ce test lorsque* $p = 0,70$.

Indication : *Soit* X *une variable aléatoire de loi binomiale* $\mathcal{B}(19;0,5)$. *On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous :*

k	19	18	17	16	15	14	13	12
$\mathbb{P}(X \geq k)$	$0,000001$	$0,000038$	$0,000364$	$0,002212$	$0,009605$	$0,031784$	$0,083534$	$0,179641$

Soit X *une variable aléatoire de loi binomiale* $\mathcal{B}(19;0,7)$. *On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous :*

k	19	18	17	16	15	14	13	12
$\mathbb{P}(X \geq k)$	$0,0011$	$0,0104$	$0,0462$	$0,1331$	$0,2822$	$0,4738$	$0,6655$	$0,8180$

Exercice 4 (5 points). *On suppose que le nombre de téléchargement mensuel d'un document, noté* X*, suit une loi de Poisson de paramètre* $\theta > 0$ *inconnu. On a alors, pour* $k \in \mathbb{N}$ *:*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k \exp(-\theta)}{k!}.$$

1. *Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}$ *de* θ.
2. *Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de* $\hat{\theta}$.
3. *Quelles sont les propriétés asymptotiques de l'estimateur* $\hat{\theta}$ *?*
4. *Sur une année, le nombre mensuel de téléchargement est :*

   janvier : 3; février : 1; mars : 4; avril : 2; mai : 6; juin : 1; juillet : 3; août : 4;
   septembre : 2; octobre : 2; novembre : 1; décembre : 1.

   Donner la valeur expérimentale de $\hat{\theta}$ *pour ces données*

Indication : *on rappelle que* $\mathbb{E}(X) = \theta$ *et* $\mathrm{var}(X) = \theta$

Exercice 5 (6 points). *Lors d'une élection, on cherche à estimer la probabilité* $\pi \in [0,1]$ *inconnue qu'un électeur vote pour le candidat A. Lors d'un sondage on pose* $X_i = 1$ *lorsque la* $i^{\text{ème}}$ *personne choisie au hasard affirme qu'elle votera pour le candidat A et on pose* $X_i = 0$ *sinon.*

1. *Donner la loi de* X_i.
2. *On considère un échantillon* $X_1, \ldots, X_n$. *Donner l'estimateur de* π *et rappeler le théorème asymptotique qui permet de déterminer un intervalle de confiance pour* π.
3. *Construire l'intervalle de confiance* $1 - \alpha$.
4. *Sur 1080 personnes interrogées, 425 répondent qu'elles voteront pour le candidat A. En utilisant ces données, calculer un intervalle de confiance expérimentale pour* π *de niveau asymptotique* $0,95$.
5. *On considère le code R suivant :*

```
n=1080
nb_succes=425
E_exp=nb_succes/n
q=qnorm(0.975)
I=c(E_exp-q*sqrt(E_exp*(1-E_exp)/n),E_exp+q*sqrt(E_exp*(1-E_exp)/n)
```

   dans ce code, que représentent : E_exp, q ? Comment modifier ce code pour que I soit un intervalle de confiance expérimental pour π *de niveau* $0,99$ *?*