Physique quantique L3 PHYS PC + PFA

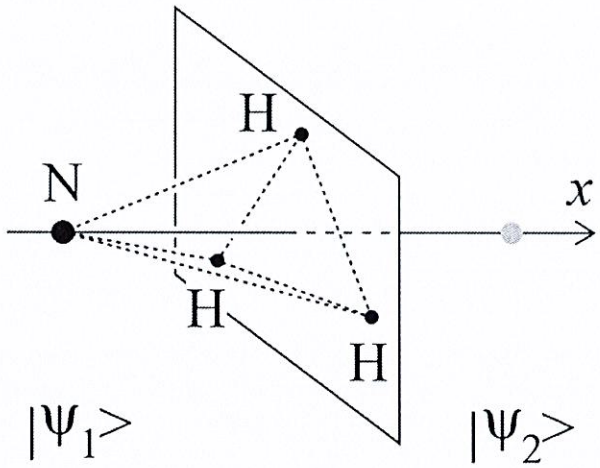

FIGURE 1 – Structure de la molécule NH_3 : L'état quantique $|\psi_1\rangle$ correspond à la situation représentée, lorsque l'atome N est à gauche du plan. L'état $|\psi_2\rangle$ correspond au cas où l'atome N est à droite du plan (position symétrique indiquée en gris).

Université de Bourgogne
Licence 3 de physique
CT Mécanique quantique 2021-2022

Problème I (10 pts)
On considère une molécule d'ammoniac (NH_3) constituée de 3 atomes d'hydrogène formant un triangle équilatéral dans un plan ; l'axe perpendiculaire au plan et passant au centre du triangle porte l'atome d'azote. La molécule peut se trouver dans deux états quantiques possibles, notés $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, correspondant aux deux positions symétriques de l'atome d'azote de part et d'autre du plan des atomes d'hydrogène. On supposera que $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert décrivant l'état quantique de la molécule. Les deux états ne sont pas des états stationnaires car l'atome d'azote peut passer d'un côté à l'autre par effet tunnel. Dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$, l'Hamiltonien H_0 du système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 \end{pmatrix}$$

où $(E_0, \Delta) \in \mathbb{R}^2$ et $\Delta > 0$.

1. Quelle est la dimension physique du paramètre Δ.

2. On note R l'opérateur décrivant la réflexion par rapport au plan des atomes H. Donner la matrice 2×2 représentant cet opérateur dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$. Quelles sont les propriétés de cette matrice ?
3. Quels sont les états propres et les valeurs propres de R ?
4. Quelle doit être la valeur du commutateur $[R, H_0]$?
5. Donner les vecteurs propres, notés $|S\rangle$ et $|A\rangle$, et les valeurs propres associéees, notées E_S et E_A, de H_0 ($|S\rangle$ désigne l'état de plus basse énergie). On justifiera l'utilisation des lettres S et A. Justifier également le signe de Δ.
6. Quelle est l'action de R sur $|S\rangle$ et $|A\rangle$? Ce résultat était-il attendu ?
7. Initialement la molécule se trouve dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_1\rangle$. Exprimer $|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|S\rangle, |A\rangle\}$ puis dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$.
8. Quelle est la probabilité $P_1(t)$ pour que l'atome d'azote se trouve à gauche du plan à l'instant t ? Décrire la dynamique du système.
9. La longueur d'onde du rayonnement émis par un maser à ammoniac est $\lambda = 1.25$ cm. Calculer la fréquence correspondante et en déduire Δ en eV (on rappelle que $h = 6.64 \times 10^{-34}$ J.s).
10. Rappeler en quelle année le Maser a-t-il été inventé.

Problème II (10 pts)
On considère un système dont l'espace des états, qui est à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée formée par les trois kets $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'opérateur hamiltonien H du système et deux observables A et B s'écrivent :

$$H = e\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \; ; \; A = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \; ; \; B = b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. Indiquer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ces 3 opérateurs.
2. Qu'appelle-t-on un spectre d'opérateur dégénéré ?
3. Mesure de A puis B. Le système se trouve dans l'état $|\phi\rangle = |1\rangle$. On effectue une mesure de A puis une mesure de B. Quels sont les résultats de mesures possibles et l'état du système après mesure ?
4. A $t = 0$ on place le système dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle.$$

   Montrer que cet état a bien une norme égale à 1.
5. On mesure l'énergie du système à $t = 0$. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

6. Calculer, toujours à $t = 0$ la valeur moyenne $\langle H \rangle$ de l'énergie ainsi que l'écart quadratique moyen ΔH.
7. On mesure A à $t = 0$. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilitées ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ?
8. Le système se trouve initialement dans l'état $|\psi(0)\rangle$. Son état quantique évolue au cours du temps. Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t.
9. Reprendre la question 6 en se plaçant à un instant t quelconque.
10. Calculer $\langle A \rangle(t)$.