QCM

Nom :

Prénom :

Les réponses au QCM seront notées comme suit : 1 point par réponse juste, 0 point si aucune réponse n'est donnée, 0 point en cas de réponse fausse.

1. On considère l'état quantique $|\psi\rangle$ qui peut s'écrire sous forme matricielle dans une base canonique sous la forme $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres complexes. Une des quatre affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?

- ○ $|\psi\rangle$ est un état normé si : $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
- ○ Le vecteur $\langle\psi|$ a pour représentation matricielle $\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}$.
- ○ Le vecteur $|\chi\rangle$ de représentation matricielle $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $|\psi\rangle$.
- ○ Le vecteur $|\chi\rangle = e^{i\pi/4}|\psi\rangle$ a la même norme que le vecteur $|\psi\rangle$.

2. On considère la matrice 2×2 suivante $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de cette matrice sont :

   - ○ 1 et -1.
   - ○ $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
   - ○ $\sqrt{0}$ et $-\sqrt{1}$.
   - ○ $1/\sqrt{2}$ et $-1/\sqrt{2}$.

3. On considère le même système qu'à la question précédente. Une des quatre affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?

   - ○ La trace de la matrice H est nulle.
   - ○ La matrice H est une matrice Hermitienne.
   - ○ La matrice H vérifie la relation : $H = H^\dagger$
   - ○ La matrice H n'est pas unitaire.

4. On considère la matrice $U = \exp[2i\pi\sigma_z]$ où σ_z est la matrice $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Une des quatre affirmations suivantes est fausse.

9. Le MASER a été inventé en :
   - ○ 1943.
   - ○ 1953.
   - ○ 1963.
   - ○ 1973.

10. I. I. Rabi a découvert le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire en :
    - ○ 1908.
    - ○ 1938.
    - ○ 1968.
    - ○ 1998.

Problème :

On considère un système à deux niveaux d'Hamiltonien H représenté dans la base canonique $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par la matrice :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le paramètre a est un paramètre réel.
2. Calculer les valeurs propres de H en fonction de a.
3. Calculer la trace et le déterminant de H.
4. Montrer que l'on peut déterminer les valeurs propres de H en connaissant uniquement la trace et le déterminant de la matrice associée.
5. Montrer que les vecteurs propres de H peuvent s'exprimer sous la forme :

   $$\begin{cases} |\chi_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle \\ |\chi_-\rangle = -\sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle. \end{cases}$$

   On donnera l'expression de θ en fonction de a.
6. Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

   $$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

   Ecrire le système d'équations différentielles couplées auxquelles obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.
7. En déduire que c_+ et c_- vérifient la même équation différentielle :

   $$\ddot{c}_\pm + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_\pm = 0.$$

   On donnera l'expression de Ω en fonction de a. Quelle est l'interprétation physique de Ω ?
8. Quelle est la solution de ce système d'équations différentielles sachant qu'à $t = 0$, on a $c_+(0) = 1$ et $c_-(0) = 0$.