

1) Répondre aux questions suivantes:

a1) Quelle est l'interprétation physique de la fonction d'onde  $\psi(\vec{x})$  d'un électron?

Comment calcule t'on la valeur moyenne

a2) de la position?

a3) de l'impulsion?

a4) de l'énergie cinétique?

b) On considère un atome d'hydrogène dans l'état fondamental, i.e. celui d'énergie la plus basse possible. Quels sont les nombres quantiques  $n, l, m$  associés?

c1) Définir le concept de dégénérescence d'une valeur propre de l'énergie.

c2) Quel est le degré de dégénérescence de l'énergie de l'état fondamental  $E_1$  d'un atome d'hydrogène? c3) Et celui d'une énergie propre  $E_n$  pour  $n$  quelconque?

d) Décrire ce que la connaissance des énergies propres et des états propres de l'atome d'hydrogène permet d'expliquer sur la structure du tableau périodique des éléments.

e) Si on mesure  $\vec{L}^2$  et la composante  $L_z$  du moment cinétique de l'électron dans un atome d'hydrogène, dans un état décrit par la fonction d'onde  $R(r)Y_l^m$  quels sont les résultats possibles?

f) Quelle est la relation entre les raies spectrales observées avec un spectromètre et les valeurs propres de l'Hamiltonien de l'atome considéré?

2) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Après le changement de variables

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$$

l'Hamiltonien s'écrit

$$H = \hbar\omega\bar{H}, \quad \bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$$

On définit les opérateurs  $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$  et  $N := a^\dagger a$ .

(a) Déterminer les relations de commutation  $[\bar{x}, \bar{p}]$ ,  $[a, a^\dagger]$ ,  $[N, a]$ ,  $[N, a^\dagger]$ .

(b) Exprimer  $H$  en fonction de  $a$  et  $a^\dagger$ .

3) On considère deux matrices hermitiques  $A$  et  $B$  avec valeurs propres non dégénérées. Montrer que si  $[A, B] = 0$  alors il existe une base de vecteurs propres communs de  $A$  et  $B$ .

4) On considère un modèle simple pour la rotation d'une molécule en terme d'un rotateur rigide décrit par l'Hamiltonien

$$H = B\vec{L}^2$$

où  $B$  est un constante caractéristique de la molécule et  $\vec{L}$  est l'opérateur moment cinétique. Les relations de commutation des composantes du moment cinétique sont  $[L_1, L_2] = i\hbar L_3$  (+ permutations cycliques).

a) Ecrire  $\vec{L}$  en termes des opérateurs de position et d'impulsion.

b) Déterminer la relation de commutation  $[\vec{L}^2, L_3]$ , en utilisant l'identité  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ .

c) Quelles sont les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien  $H$ ?

d) Quel est le degré de dégénérescence des valeurs propres?