# EXAMEN DE PHYSIQUE QUANTIQUE I L3, PC/PFA janvier 2022

**1)** Répondre aux questions suivantes :
a) Ecrire l'Hamiltonien pour l'atome d'Helium.
b) Quelle est l'interprétation physique de la fonction d'onde $\psi(\vec{x}, t)$ d'un électron?
c) Quels sont les opérateurs qui correspondent aux trois composantes du moment cinétique de l'électron d'un atome d'hydrogène? Etablir leurs relations de commutation.
d) Décrire les notions d'état et d'observable, et leur représentation en mécanique quantique.
e) Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome et les solutions de l'équation de Schrödinger?
f) Expliquer la structure du tableau périodique des éléments à partir du modèle quantique approché dans lequel on néglige l'interaction entre les électrons.

**2)** On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Après le changement de variables $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$ l'Hamiltonien s'écrit $H = \hbar\omega\bar{H}$, $\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$.
On définit les opérateurs $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$ et $N := a^\dagger a$.
(a) *Déterminer les relations de commutation* $[\bar{x}\ ,\ \bar{p}]$, $[a\ ,\ a^\dagger]$, $[N\ ,\ a]$, $[N\ ,\ a^\dagger]$.
(b) Montrer que les valeurs propres de $H$ ne peuvent pas être négatives.
(c) Exprimer $H$ en fonction de $a$ et $a^\dagger$.
(d) Montrer que si $\varphi$ est une fonction propre de $H$ avec valeur propre $E_n$, alors $a^\dagger\varphi$ est aussi une fonction propre. Quelle est la valeur propre correspndante ?
(e) Sous quelle condition $a\varphi$ est aussi une fonction propre ? Quelle est la valeur propre correspndante ?

**3)** Montrer que si un système quantique se trouve dans un état propre $\varphi_n$ d'énergie $E_n$ $(H\varphi_n = E_n\varphi_n)$, alors la variance $\Delta^2_{\varphi_n} =< H^2 > - < H >^2$ est nulle.

**4)** Soit un système physique dont l'espace de Hilbert est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1>, |u_2>, |u_3>, |u_4>\}$. Dans cette base, prise dans cet ordre, on considère les opérateurs

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Construire une base de vecteurs propres communs à $H, B$ et $C$.
(b) Parmi les ensembles d'opérateurs $\{B, C\}$, $\{H, B\}$, $\{H, C\}$, lesquels forment un ensemble complet d'observables qui commutent (E.C.O.C.)?