

1) Dessiner le portrait de phase et donner une classification de tous les types d'orbites possibles pour les systèmes décrits par les Hamiltoniens suivants :

(a) $H = p^2/(2m) + x^4$.

(b) $H = p^2/(2m) - x^2$.

(c) $H = p^2/(2m) - x^2 + x^3$.

(d) $H = p^2/(2m) - \sin^2(x)$.

(e) Définir les concepts suivants : (i) point d'équilibre stable, (ii) point d'équilibre instable, (iii) séparatrice.

2) a) Montrer que dans un système Hamiltonien l'énergie totale est conservée.

b) Exprimer cette propriété dans le formalisme de Poisson

c) Montrer que pour un oscillateur harmonique isotrope à trois dimensions, décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x}^2$$

le moment cinétique $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ est conservé.

3) Le pion π^+ est une particule élémentaire qui a une durée de vie propre de $\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8}$ s. On considère des pions qui se déplacent par rapport au repère du laboratoire (R_L) à une vitesse constante v . On considère deux valeurs de la vitesse v :

(i) 40% de la vitesse de la lumière,

(ii) 80% de la vitesse de la lumière.

a) Quelle est la durée de vie de la particule mesurée depuis le référentiel du laboratoire ?

b) Quelle est la distance parcourue par le pion pendant sa durée de vie (par rapport à R_L) ?

c) Quelles seraient ces distances observées depuis le référentiel R_0 dans lequel la particule est au repos ?

d) Interpréter en termes de dilatation et contraction de l'espace-temps.

Indication : Vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8$ m/s

4) Répondre aux questions suivantes :

a) Comment définit-on l'impulsion relativiste ? Quelle est sa relation avec la vitesse propre ?

b) Expliquer pourquoi la quatrième composante du quadri-vecteur impulsion-énergie s'interprète comme une énergie (divisée par c).

c) Comment se transforme le quadri-vecteur impulsion-énergie lors d'un changement entre deux repères inertiels ?

d) Montrer que pour deux événements séparés par un intervalle de type espace il existe un référentiel dans lequel ils sont simultanés.