

## CONTROLE TERMINAL – SESSSION 1

Durée : 2h 00 min

*Pas de documents, pas de téléphone portable. Calculatrice autorisée  
prenez soin de justifier vos réponses et de respecter les notations employées (cela sera pris en compte dans la notation)*

NOM :

### **Problème : L'optique pour des capteurs de température performants** **23 points**

Ce problème volontairement assez long est noté sur 23, ce qui vous laisse la possibilité de ne pas traiter un certain nombre de questions ou d'avoir quelques erreurs.

### **Partie 0 : Questions préliminaires : sources étudiées** **1.75 points**

chapitres de cours associés : 1, 8

Dans ce problème, nous allons nous intéresser à l'utilisation d'une fibre optique en tant que capteur optique de température. Nous considérerons deux types de fibres, toutes deux faites de silice, l'une dont les propriétés sont isotropes et une autre qui présente une biréfringence.

L'indice  $n$  de la silice est  $n = 1.5$ . En première approximation, nous négligerons le phénomène de dispersion si bien que cet indice sera considéré comme indépendant de la longueur d'onde. De même, nous ne prendrons pas en compte d'éventuels phénomènes d'absorption.

Si besoin, la valeur de la vitesse de lumière dans le vide  $c$  est  $3.10^8$  m/s.

Nous considérerons dans le cadre de ce problème deux sources différentes de lumière. La première sera un laser émettant une radiation verte  $\lambda_0$  à 532 nm. La seconde source sera une source blanche couvrant de manière uniforme l'ensemble du spectre visible.

**P0.1)** Quelle est la plage de longueurs d'onde correspondant au spectre visible ? 0.25 pt

$\lambda =$ _____ à _____ <small>(valeurs numériques)</small>
------------------------------------------------------------------

**P0.2)** Donnez la fréquence  $\nu_0$  de la lumière émise par le laser vert ? 0.5 pt

$\nu_0 =$ _____ <small>(expression analytique)</small> = _____ <small>(valeur numérique)</small>
--------------------------------------------------------------------------------------------------

**P0.3)** En fait, ce laser est basé sur un processus de doublage de fréquence : un premier laser de longueur d'onde  $\lambda_l$  pompe un cristal non-linéaire qui émet le rayonnement vert à une fréquence double de la fréquence du rayonnement de ce premier laser. Quelle est la longueur d'onde  $\lambda_l$  et dans quelle gamme spectrale se situe-t-il ? 0.5 pt

$\lambda_l =$ _____ <small>(valeur numérique)</small>
<input type="checkbox"/> Visible <input type="checkbox"/> Infrarouge <input type="checkbox"/> UV <input type="checkbox"/> Rayons X <input type="checkbox"/> THz

**P0.4)** Rappelez les équations de Maxwell vérifiées par les champs électromagnétiques dans le cadre des approximations généralement faites dans l'optique. 0.5 pt

**Partie 1 : Injection efficace de la lumière dans la fibre optique :**

**2.75 points**

chapitre de cours associé : 6

Dans cette première partie, nous nous intéressons à l'injection de la lumière laser à l'intérieur de la fibre optique. On considère que la lumière émise par le laser est décrite en première approximation par une onde plane monochromatique<sup>1</sup>. Le faisceau laser est focalisé par un dispositif optique de type microscope qui permet d'illuminer le cœur de la fibre optique dont le diamètre  $d$  est  $4 \mu\text{m}$ . On assimile ici le microscope à une lentille idéale qui est totalement transparente. Le diamètre de cette lentille est noté  $D$  et sa focale  $f'$ . La distance d'un point de la lentille par rapport à l'axe optique est notée  $r$  et on notera  $cerc(r/D)$  la fonction définissant un disque de diamètre  $D$ .

**P1.1)** En optique de Fourier, quelle est la fonction de transmission  $f(r)$  qui peut être associée à la lentille considérée qui est de dimension finie ? 0.5 pt

$f(r) =$

**P1.2)** Comment s'appelle la tache caractéristique qui est obtenue au point de focalisation de la lentille ? Doit-t-on l'assimiler à une aberration géométrique ? Quelle fonction mathématique particulière cette tache fait-elle intervenir ? 0.75 pt

*La forme caractéristique obtenue au point de focalisation est appelée*

*Elle est assimilable à une aberration géométrique :  OUI  NON*

*La fonction mathématique particulière intervenant dans sa définition est :*

**P1.3)** De manière générale, comment s'appelle en optique ondulatoire l'image d'un point par un système optique ? Quelle quantité peut-on y associer lorsqu'on raisonne dans le domaine des fréquences spatiales ? 0.5 pt

*L'image d'un point par un système optique est*

*Lorsqu'on raisonne dans le domaine des fréquences spatiales, on considère*

**P1.4)** Donnez l'expression analytique du diamètre  $d_f$  caractéristique de la tache évoquée en **P1.2)** en fonction de  $\lambda$ ,  $D$  et  $f'$  0.5 pt

$d_f =$

*expression littérale*

**P1.5)** Quelle doit être l'ouverture numérique  $ON$  de la lentille pour que la lumière soit injectée efficacement dans la fibre optique ? On considérera ici pour simplifier que l'injection est satisfaisante si  $d_f = d$ . On rappelle que l'ouverture numérique peut être approximée par  $ON = D / 2f'$ . 0.5 pt

$ON =$  =

*expression littérale en fonction de ON* *résultat numérique*

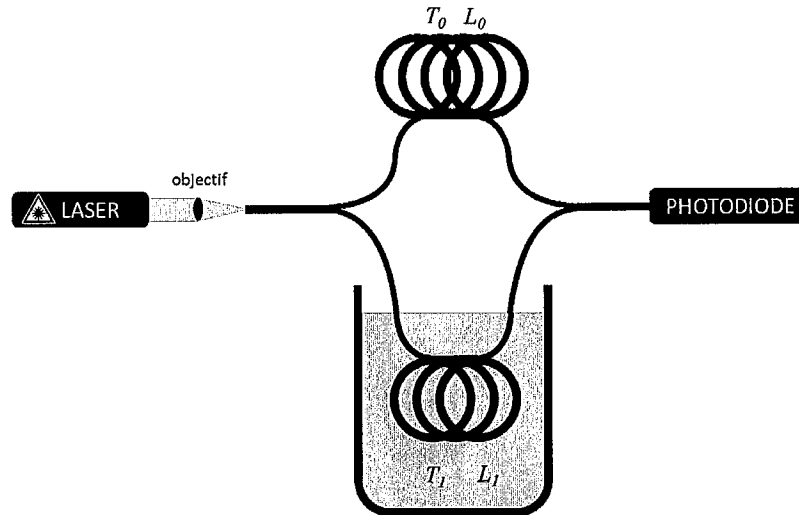
<sup>1</sup> En réalité, il serait plus précis de considérer un profil de faisceau gaussien.

**Partie 2 : 1<sup>er</sup> Dispositif interférentiel et sensibilité :**

**3.25 points**

chapters de cours associé : 3

Notre objectif est de mesurer une faible variation de température. Nous nous intéressons ici tout d'abord à un premier capteur basé sur un dispositif interférentiel représenté figure ci-dessous. La lumière incidente est séparée en deux avant de parcourir deux tronçons de longueur respective  $L_0$  et  $L_1$  (les deux longueurs étant choisies assez proches). L'un des bras est à la température de référence  $T_0$  alors que l'autre bras est plongé totalement dans un liquide porté à la température  $T_1$  supposée homogène dans tout le liquide. Les deux faisceaux sont ensuite recombinaés et l'intensité totale est mesurée sur une photodiode. Nous supposons ici que les deux faisceaux ont une polarisation identique.



**P2.1)** Quel est le nom typique de la configuration d'interféromètre utilisé ? Citez deux autres interféromètres à deux ondes. 0.5 pt

*L'interféromètre utilisé est un*

*D'autres dispositifs interférométriques sont : -*

-

En raison de la différence de température, l'indice optique de la fibre varie légèrement. L'indice de propagation sera  $n_0$  pour la fibre à température  $T_0$  et  $n_1$  pour la fibre à la température  $T_1$ . On négligera ici l'impact de la dilatation thermique (la longueur de la fibre  $L_1$  ne varie pas <sup>2</sup>).

**P2.2)** Exprimez la différence de marche  $\delta$  et le déphasage  $\Delta\phi$  entre les deux bras de l'interféromètre en fonction des longueurs et indices impliqués. On prendra comme onde de référence la lumière traversant la fibre à température  $T_0$ . 0.5 pt

$\delta =$  *expression littérale*

$\Delta\phi =$  *expression littérale*

**P2.3)** Rappelez l'expression de l'intensité  $I$  mesurée sur la photodiode en fonction du déphasage entre les deux faisceaux  $\Delta\phi$ . On notera l'intensité parcourant chacune des fibres  $I_0$ . 0.5 pt

$I =$  *expression littérale*

En faisant un développement limité à l'ordre 1, on peut considérer que l'indice de propagation  $n_1$  évolue de manière linéaire avec la température  $T_1$  :

$$n_1 = n_0 + \alpha (T_1 - T_0)$$

<sup>2</sup> En réalité, cette approximation est un peu trop brutale et expérimentalement, pour un travail soigneux, les effets de dilatation thermique ne peuvent pas être négligés.

**P2.4)** Quelle est l'unité de  $\alpha$  ?

0.25 pt

$\alpha$  est exprimé en

**P2.5)** La fibre de longueur  $L_1$  est initialement à la température  $T_0$ . On accroît alors la température dans le segment immergé de  $\Delta T$ . Quelle est alors la variation  $\Delta\delta$  introduite dans la différence de marche  $\delta$  ? 0.5 pt

$\Delta\delta =$  *expression littérale*

**P2.6)** Le détecteur mesure initialement une intensité nulle. On applique alors une différence prononcée de température. On voit alors exactement défiler 25 minima d'intensité (25 franges sombres). Quelle est la variation  $\Delta\delta$  introduite ? 0.5 pt

$\Delta\delta =$  *résultat numérique*

Justification :

On considère un coefficient  $\alpha = 1.553 \cdot 10^{-5} \text{ SI}^{-3}$  et une longueur de fibre  $L_1 = 0.5 \text{ m}$ .

**P2.7)** Quelle est la différence de température  $\Delta T$  qui a été appliquée ?

0.5 pt

$\Delta T =$  *(expression littérale)* = *(résultat numérique)*

### Partie 3 : Spectre cannelé et réseau de diffraction

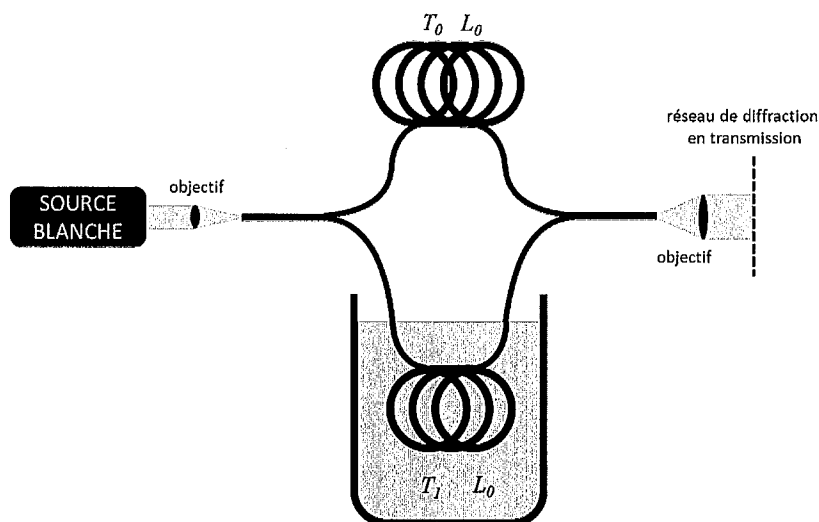
**5.75 points**

chapitre de cours associé : 3, 4, 5

#### **A – Spectre cannelé**

**1.75 points**

Nous considérons ici une modification du montage précédent où la source laser est désormais remplacée par une source blanche. On suppose que les deux segments de fibre ont désormais exactement la même longueur initiale  $L_0 = L_1$ . On s'intéressera maintenant à une analyse spectrale de la lumière émergente.



**P3A.1)** Donnez l'expression de l'intensité  $I(\lambda)$  mesurée à la longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de la différence de marche  $\delta$ . On notera l'intensité parcourant chacune des fibres  $I_0$ . 0.25 pt

$I(\lambda) =$  *(expression littérale)*

<sup>3</sup> J. B. Austin and R. H. H. Pierce Jr. , "A Determination of the Refractive Index of Vitreous Silica and the Calibration of Silica Refraction Thermometers Between 18° and -200°C", Physics 6, 43-46 (1935) <https://doi.org/10.1063/1.1745269>

**P3A.2)** Exprimez ce résultat en fonction de fréquence  $\nu$  et de la différence de température  $\Delta T$ . 0.5 pt

$$I(\nu, \Delta T) = \text{expression littérale}$$

**P3A.3)** En déduire l'intervalle spectral  $\Delta\nu$  entre deux fréquences donnant lieu à une frange sombre. 0.5 pt

$$\Delta\nu = \text{expression littérale}$$

**P3A.4)** On considère les conditions équivalentes à la question P2.5). En déduire la valeur numérique de  $\Delta\nu$ . Quel sera l'effet d'une augmentation de température sur  $\Delta\nu$  ? 0.5 pt

$$\Delta\nu = \text{expression numérique}$$

Influence de  $\Delta T$  :

## B – Réseau de diffraction

**4 points**

Pour mesurer le spectre en sortie du dispositif, nous utilisons un réseau de diffraction en transmission éclairé en incidence normale. Ce réseau est un réseau binaire (0 ou 1) représenté ci-dessous avec une période  $\Lambda$ .

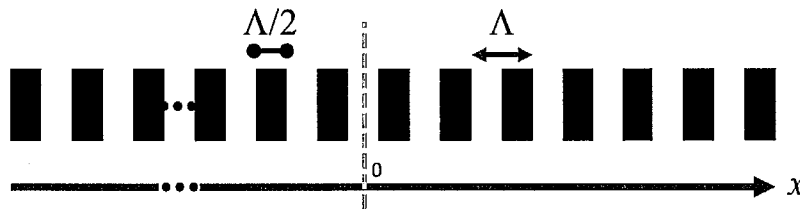


Schéma du réseau de modulation d'amplitude binaire

**P3B.1)** Exprimez la fonction de transparence pupillaire  $t$  associée à ce réseau en fonction de  $\Lambda$ . Vous pourrez pour cela utiliser les fonctions porte  $\Pi$  et la fonction peigne de Dirac  $\text{III}$ . 0.5 pt

$$t(x) =$$

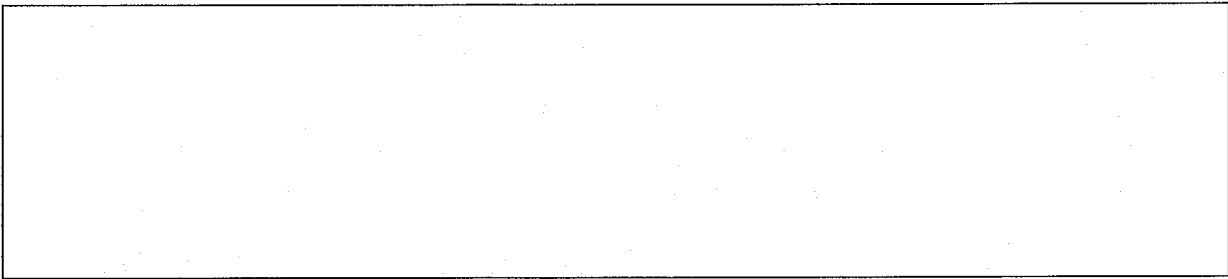
**P3B.2)** Dans le cas général, considérons une ouverture de transparence pupillaire  $t(x,y)$  illuminée par une onde plane. Quelle est l'expression générale de l'intensité diffractée  $I(x',y')$  observée à grande distance  $z_0$  de l'objet ? (le résultat sera donné à un coefficient multiplicateur près). On pourra noter  $F$  la transformée de Fourier de  $f$ . 0.5 pt

$$I(x',y') =$$

**P3B.3)** En déduire la figure de diffraction associée au cas considéré en **P3B.1)** (on supposera que le régime de Fraunhofer est applicable). 0.75 pt

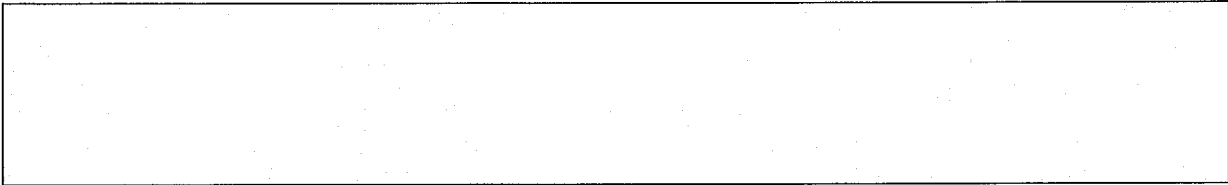
On rappelle que :

$$\text{III}\left(\frac{t}{T_0}\right) \xrightarrow{TF} \frac{2\pi}{T_0} \text{III}\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right) \quad \text{et que} \quad \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{TF} a \text{sinc}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$



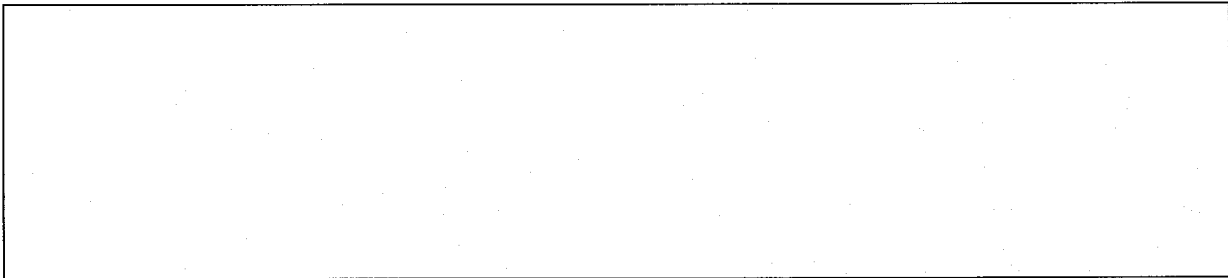
**P3B.4)** En déduire la direction vers laquelle est diffracté le premier ordre.

0.5 pt



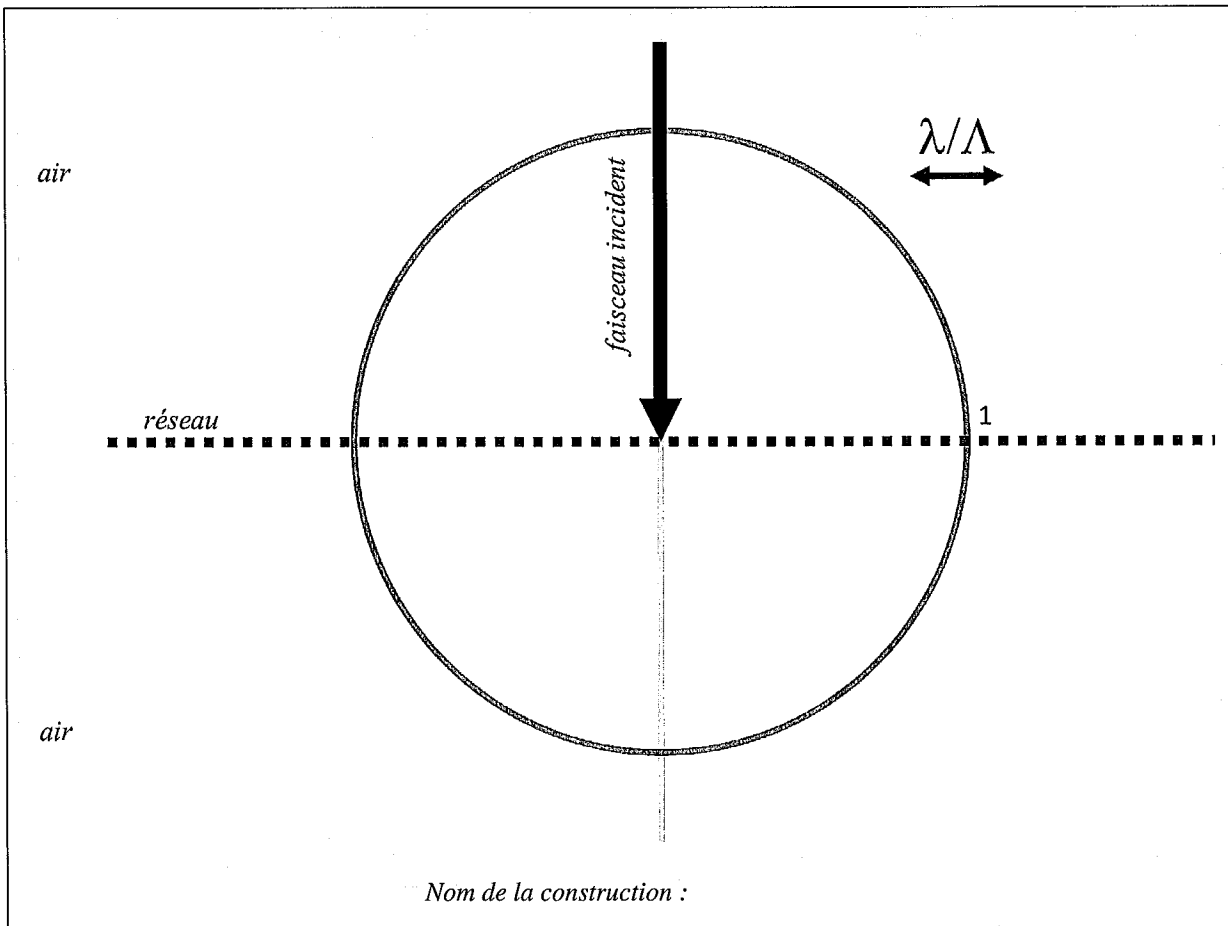
**P3B.5)** Est-ce que ce résultat est cohérent avec une autre loi que vous connaissez pour les réseaux ? (Énoncez cette loi)

0.5 pt



**P3B.6)** Complétez la construction ci-dessous et trouvez graphiquement les directions de diffraction pour le rapport  $\lambda/\Lambda$  indiqué sur la figure. Comment se nomme cette construction basée sur la surface de indices ?

0.75 pt



**P3B.7)** Le réseau n'est en fait éclairé que sur une partie limitée qui est  $100 \lambda$ . Exprimez la nouvelle fonction de transfert  $t'(x)$  à partir de  $t(x)$  en prenant en compte cette limitation. 0.5 pt

$t'(x) =$

**Partie 4 : Perot Fabry et traitement réfléchissant**

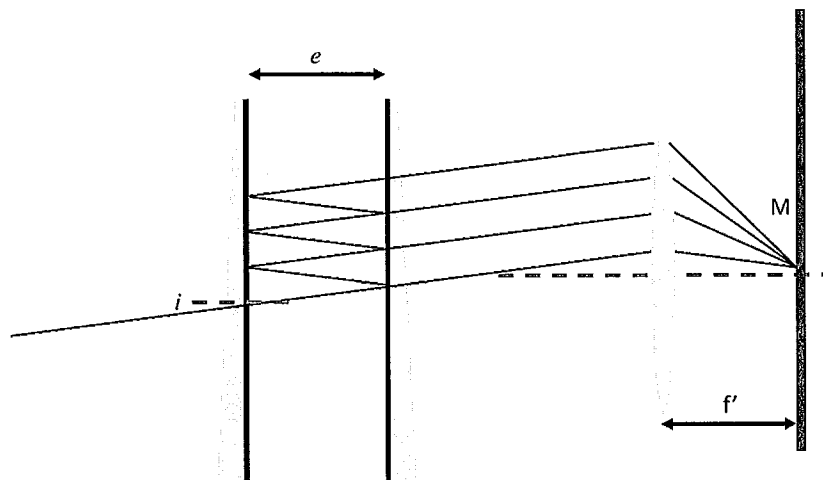
**5.25 points**

chapitres de cours associé : 2,4

**A – Fabry Perot**

**2 points**

Une alternative aux réseaux de diffraction est le Fabry-Perot. Le dispositif envisagé est représenté figure ci-dessous. Le faisceau à analyser arrive avec un angle  $i$  faible (ici exagéré sur la figure) et subit plusieurs réflexions entre deux surfaces réfléchissantes espacées d'une distance  $e = 2.5 \text{ cm}$  dans l'air. En sortie, l'observation est réalisée au foyer d'une lentille de focale  $f'$ .



**P4A.1)** Pourquoi les deux lames utilisées ne sont pas des lames qui ont des faces parfaitement parallèles ? (un petit angle existe entre les faces intérieures et extérieures). 0.5 pt

**P4A.2)** Quelle est l'utilité de la lentille placée en sortie du dispositif ? 0.5 pt

**P4A.3)** Quel est le nom de la fonction impliquée dans le calcul de la réponse du Perot-Fabry ? 0.5 pt

**P4A.4)** Que vaut l'intervalle spectral libre du Fabry-Perot ? 0.5 pt

ISL = = *expression littérale* = = *expression numérique*

**B – Traitement réfléchissant****3.25 points**

Nous souhaitons avoir un Perot-Fabry de grande efficacité. Pour cela, un coefficient de réflexion très élevé est nécessaire. Ainsi, un traitement couche mince sera appliqué sur les faces concernées. On considère alors une couche mince d'indice  $n_c$  sur le substrat de verre d'indice  $n_s$ , le milieu incident étant de l'air.

On rappelle que les champs électromagnétique et magnétique au niveau de l'interface air-couche mince peuvent être exprimés à partir des champs au niveau de l'interface couche-mince / verre grâce à une matrice  $M$  :

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont

$$M = \begin{pmatrix} \cos(k_0 h) & -i \sin(k_0 h) / Y_C \\ -i \sin(k_0 h) Y_C & \cos(k_0 h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

avec  $k_0 = 2\pi / \lambda$ ,  $h$  la différence de marche optique entre les deux interfaces considérées et  $Y_C$  l'admittance de la couche mince donnée pour la situation étudiée par :

$$Y_C = Y_0 n_c \cos(\theta),$$

avec  $Y_0$  l'admittance du vide et  $\theta$  l'angle du faisceau par rapport à la normale dans le milieu.

**P4B.1)** On considère une couche mince quart d'onde à 532 nm avec une incidence normale. Comment alors se simplifie la matrice  $M$  ? 0.75 pt

$$M =$$

On associe deux couches minces d'indice  $n_1$  et  $n_2$  pour la première et la seconde couche respectivement. A ces couches, on associe les matrices  $M_1$  et  $M_2$ .

**P4B.2)** Quelle est la matrice  $M_{12}$  de l'ensemble des deux couches ? 0.75 pt

$$M_{12} =$$

En fait on associe  $N$  paires de couches minces d'indices  $n_1$  et  $n_2$ .

**P4B.3)** Quelle est la matrice  $M_T$  totale ? 0.5 pt

$$M_T =$$

Le coefficient de réflexion de l'empilement est donné par :

$$r = \frac{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_s m_{12} - m_{21} - Y_s m_{22}}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_s m_{12} + m_{21} + Y_s m_{22}}$$

avec  $m_{ij}$  les valeurs de  $M_T$ .

**P4B.4)** Exprimez  $r$ , en fonction des indices optiques impliqués  $n_s$  et  $n_2/n_1$ . 0.75 pt

$$r =$$



**P4B.5)** On veut un traitement réfléchissant. Comment doit être choisi l'indice  $n_2$  par rapport à  $n_1$  ? Justifiez votre réponse. 0.25 pt

**P4B.6)** Est-ce que ce traitement sera aussi efficace sur toute la plage du visible ? Justifiez votre réponse. 0.25 pt

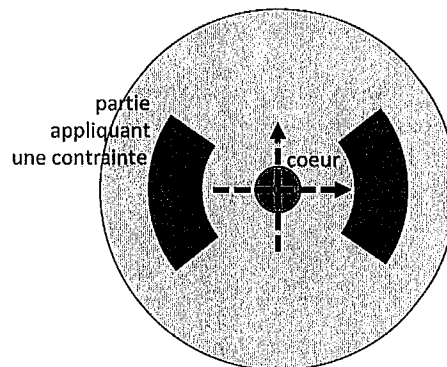
Efficacité sur une large bande :  OUI  NON

### Partie 5 : Utilisation d'une fibre biréfringente

4.25 points

chapitre de cours associé : 3,7

Dans cette dernière partie, on remplace le système de deux fibres par une seule fibre optique dont la structure est représentée ci-dessous (on l'appelle fibre bowtie, i.e. nœud papillon). Dans cette fibre, deux parties exerçant une contrainte sur le cœur rompent la symétrie circulaire et induisent l'existence d'une biréfringence  $\Delta n$ , avec un axe lent et un axe rapide (ici représentés par des flèches pointillées). En fonction de la température, la valeur de la biréfringence va évoluer car la température a une forte influence sur la dilatation physique des parties induisant une contrainte.



**P5.1)** Quel effet physique permet de transformer une contrainte mécanique en une variation des propriétés de l'indice ? 0.25 pt

Dans toute cette partie, on utilise comme source initiale le laser vert. Celui-ci est initialement polarisé horizontalement.

**P5.2)** Va-t-on observer en sortie un comportement interférentiel ? Justifiez votre réponse. 0.25 pt

On visualise un processus d'interférences :  OUI  NON

**P5.3)** Pour optimiser le montage, lesquels de ces éléments sont intéressants ? Où les placer par rapport à la fibre ?  
 Cochez les cases correspondant. 0.75 pt

Élément	Intéressant	A placer avant fibre	A placer après fibre	Justification
Élément polarisant				
Lame quart d'onde				
Lame demi-onde				

**P5.4)** On considère une polarisation rectiligne de la lumière en entrée de fibre. Exprimez le vecteur de Jones  $\vec{J}_\theta$  qui peut être associé à cette polarisation dans le cas où la polarisation de la lumière fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale. Que devient ce résultat lorsque la polarisation est rectiligne à 45° ? est horizontale ? 0.5 pt

$$\vec{J}_\theta = \qquad \qquad \qquad \vec{J}_{45^\circ} = \qquad \qquad \qquad \vec{J}_0 =$$

On place avant la fibre une lame d'onde d'épaisseur  $e = 1.56 \mu\text{m}$  et de biréfringence  $\Delta n' = -0.17$ .

**P5.5)** Comment peut-on qualifier cette lame ? Quel est le déphasage introduit  $\Delta\phi'$  ? 0.5 pt

Cette lame est une lame

$\Delta\phi' =$

Nous rappelons l'expression générale de la matrice de Jones caractéristique d'une lame de phase constituée d'un matériau anisotrope uniaxe de biréfringence  $\Delta n$  et d'épaisseur  $L$  dont l'orientation de l'axe rapide fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale et dont le déphasage introduit est  $\Delta\phi$  :

$$M_J = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\Delta\phi} \sin^2 \alpha & (1 - e^{-i\Delta\phi}) \cos \alpha \sin \alpha \\ (1 - e^{-i\Delta\phi}) \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + e^{-i\Delta\phi} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

On rappelle que  $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$  et  $2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$

**P5.6)** Comment peut-on simplifier cette matrice dans le cas que nous considérons ici avec le déphasage  $\Delta\phi'$  ? 0.5 pt

$M_J =$

**P5.7)** Si on considère une polarisation incidente horizontale telle que délivrée par le laser, quel est l'état de polarisation  $\overline{J}'$  obtenu après la lame ? (résultat exprimé en fonction de  $\alpha$ ). Conclure sur l'action de lame considérée. 0.5 pt

$$\overline{J}' =$$

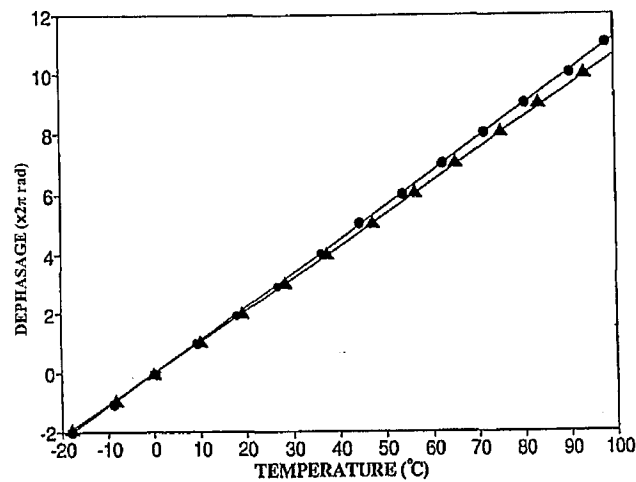
Action de la lame considérée sur la polarisation :

**P5.8)** Quelle doit être l'orientation optimale de la polarisation à injecter dans la fibre ? En déduire la valeur de  $\alpha$ . 0.5 pt

Polarisation optimale à utiliser en entrée de la fibre :

Valeur de  $\alpha$  à utiliser :

La figure ci-dessous résume deux séries de mesures expérimentales menées avec la fibre bowtie <sup>4</sup>.



**P5.9)** En déduire la sensibilité du montage, exprimée en rad/°C. Augmenter la longueur de la fibre impliquée conduirait-t-il à augmenter ou bien diminuer cette sensibilité ? 0.5 pt

Sensibilité du dispositif :

Impact de la longueur de fibre bowtie sur la sensibilité :

**PS :** 2022 est l'année internationale du verre.

<sup>4</sup> Mesures tirées de Feng Zhang and John W. Y. Lit, "Temperature and strain sensitivity measurements of high-birefringent polarization-maintaining fibers," Appl. Opt. 32, 2213-2218 (1993)

