Licence L3/ S6
PFA, PC et SPI-Méca

Seconde session
Vendrdei 24 juin 2022

Ondes et Vibrations

Sans document – Durée 2h00 – Calculatrice non autorisée – Téléphone portable éteint et rangé

I. Oscillations d'objets flottants

1. Oscillations d'un bouchon, libres et non amorties

On enfonce un bouchon cylindrique de section s dans l'eau puis on le lâche. On néglige l'action de l'air ambiant et toute cause d'amortissement. On note x le déplacement vertical du bouchon par rapport à sa position d'équilibre.

a) **Exprimer** la fréquence angulaire ω_o des oscillations en fonction des paramètres suivants : ρ masse volumique du bouchon, h hauteur du bouchon, g accélération de la pesanteur et ρ' masse volumique de l'eau.

b) La poussée d'Archimède est équivalente à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k. **Exprimer** k en fonction de ρ', g et s.

2. Oscillations d'un bouchon, libres et amorties

On suppose que le mouvement du bouchon est amorti par une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

a) **Ecrire** l'équation différentielle régissant le déplacement x du bouchon. On posera $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ avec $m = \rho h s$ la masse du bouchon et $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$.

b) **Donner** sans démonstration la forme de la solution en régime faiblement amorti. On définira ω la pseudo-pulsation. Représenter le graphe de x en fonction du temps t et positionner la constante de temps τ de l'oscillateur sur ce graphe.

II. Ondes hydrodynamiques

Le potentiel des vitesses $\varphi(x,z,t)$ des ondes hydrodynamiques de gravité de faible amplitude qui se propagent dans la direction horizontale x satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

où g est l'accélération de la pesanteur et z la direction verticale. z = 0 est la position de la surface libre (interface eau-air) à l'équilibre. La solution de cette équation est

$$\varphi = \omega a \frac{\cosh[k(z+h)]}{k\sinh(kh)}\sin(kx - \omega t)$$

où a est l'amplitude du déplacement de la surface libre, ω est la fréquence angulaire, *k* le nombre d'onde et *h* la profondeur d'eau.

1. **Déterminer** la relation de dispersion des ondes.
2. **Approximer** la relation de dispersion dans le cas de l'eau peu profonde ($kh \ll 1$). On posera et on rappelle que si u << 1 alors $\tanh(u) \cong u$. **Déterminer** les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g. Les ondes sont-elles dispersives ?
3. **Approximer** maintenant la relation de dispersion dans le cas de l'eau profonde ($kh \gg 1$). On rappelle que si u >> 1 alors $\tanh(u) \cong 1$. **Déterminer** les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g. Les ondes sont-elles dispersives ?
4. Sans démonstration, que pouvez-vous dire des trajectoires des particules dans le cas d'ondes planes en eau profonde ?