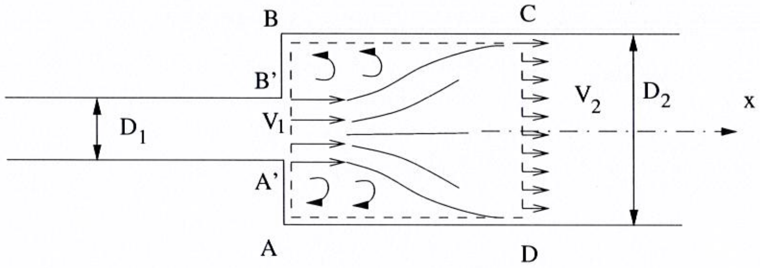
Contrôle de Mécanique des fluides - Session 1

17 Mai 2022 – durée : 2 heures

Exercice 1

On considère deux **conduites cylindriques** coaxiales de diamètres D_1 et D_2 ($D_2 > D_1$). L'expérience montre qu'à la sortie de la conduite de diamètres D_1 il se forme **un jet de diamétre** D_1 dont on suppose la vitesse V_1 uniforme. Il y a décollement des lignes de courant et formation d'une zone de recirculation (fluide mort à **vitesse nulle** entre AA' et BB' sur la figure), mais **la pression motrice p_1^* reste constante en moyenne dans la section** AB. À une distance suffisante en aval, **la vitesse V_2 redevient uniforme dans la conduite de diamètres D_2, la pression motrice p_2^* est également constante dans la section** CD. Dans tout le problème on suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible.



1. (2 pts) Exprimer la perte de charge ΔH produite à l'élargissement brusque entre les sections AB et CD en fonction de ρ, g, p_1^*, p_2^*, V_1 et V_2.
2. Pour exprimer la différence de pression motrice de la question précédente en fonction des vitesses, on utilise le théorème d'Euler.
   — (1 pt) Représenter en 3D et paramétrer la surface de contrôle délimitée par les $ABCD$ sur la figure.
   — (3 pts) Appliquer le théorème d'Euler à la surface de contrôle **en projection sur l'axe** $\vec{x}$. En déduire l'expression de $(p_1^* - p_2^*)$ (Attention aux surfaces et aux vitesses !)

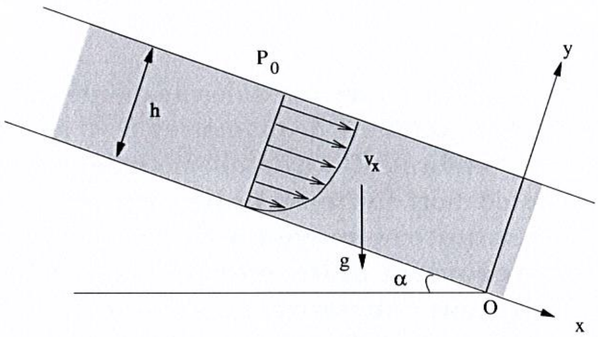
   Indication : On supposera les contraintes tangentielles liées à la viscosité négligeables par rapport aux forces de pression et on admettra que (S étant une surface de contrôle) :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{g} - \int_S p\vec{n}\, dS \;=\; - \int_S p^* \vec{n}\, dS$$

3. (1 pt) En déduire la relation de Borda-Carnot qui exprime la perte de charge ΔH en fonction de V_1, V_2 et g.
4. (1 pt) À l'aide de la relation de Borda-Carnot et de l'expression d'une perte de charge singulière (**dans laquelle on utilisera la vitesse la plus rapide**) déduire l'expression du coefficient de perte de charge singulière K d'un élargissement brusque en fonction de D_1 et D_2.

Exercice 2

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$: vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-dessous). On note h l'épaisseur constante de l'écoulement, et P_0 la pression atmosphérique à la surface libre.



1. (2 pts) En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x\ \vec{e}_x\ \ (V_y = 0)$, montrer que la composante V_x ne dépend que de y. En déduire l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère Oxy et utiliser les équations de Navier-Stokes du formulaire).
2. Montrer que la pression $p(x, y)$ a pour expression :

$$p(y) = (h - y)K_1 + K_2$$

   où K_1 et K_2 sont des constantes à préciser.
3. (1 pt) Écrire la première équation de Navier Stokes (projection sur l'axe x). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse V_x.
4. (1 pt) Déterminer l'expression de $V_x(y)$.
5. (1 pt) On donne la condition limite à la surface libre $(y = h)$: $\dfrac{dV_x}{dy} = 0$.

   En précisant la condition limite à la paroi $(y = 0)$, déduire l'expression du champ des vitesses en fonction de ρ, g, α, h, y et μ.
6. (1 pt) En déduire la forme du profil et dire comment varie la vitesse en fonction de la viscosité (sans faire de calcul).
7. (1 pt) Calculer la vitesse moyenne V_m.

Formulaire :

Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\ p + \mu \vec{\Delta}\vec{V} + \rho\vec{g}$$

avec : $\vec{\Delta}\vec{V} = \Delta V_x \vec{e}_x + \Delta V_y \vec{e}_y$ et $\Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en deux dimensions.