Méca milieu continu

CYLINDRE ENCASTRE EN ROTATION

L'espace est rapporté au repère cartésien fixe R_0 défini par :

$$R_0 = (O_0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{x_3})$$

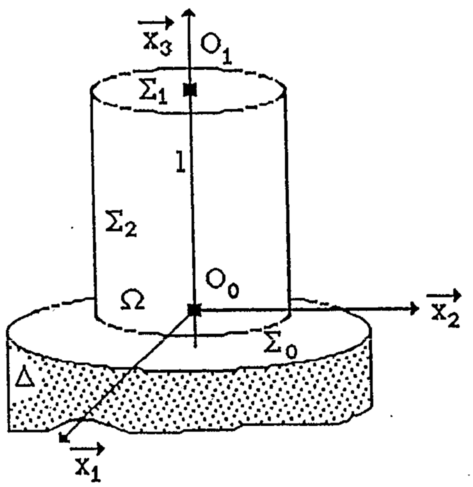
Soit un repère cartésien orthonormé $R = (O_0, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ où $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ est la position d'un point M, qui est attaché à un massif Δ rigide cylindrique circulaire d'axe (O_0x_3) ascendant et de rayon b. On considère un second cylindre Ω d'axe (O_0x_3) également et de section droite Σ circulaire de rayon a (a < b), encastré dans le massif Δ. Le cylindre Ω est limité en hauteur par la surface Σ_0 située à $x_3 = 0$, par la surface Σ_1 située à $x_3 = l$ et par sa surface latérale appelée Σ_2. On note O le centre d'inertie de la section courante Σ de Ω. Les points O_0 et O_1 sont les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 et le repère R est un repère principal d'inertie pour le cylindre Ω.

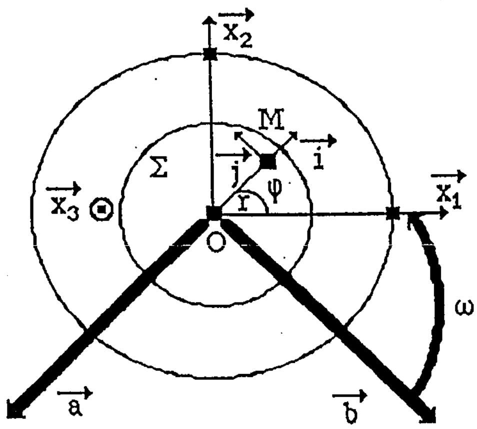
En tout point M de Σ, on définit le repère local des coordonnées cylindriques (r, φ, x_3) par :

$$R_c = (O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{x_3}) \text{ avec } r = \left\| \overrightarrow{O_0M} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi\, \vec{x_1} + \sin\varphi\, \vec{x_2} \\ \vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{x_1} + \cos\varphi\, \vec{x_2} \end{cases}$$

On suppose que le matériau qui constitue le massif Δ est infiniment plus rigide que celui qui constitue Ω. On suppose que le domaine Ω est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope dont E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et (λ, μ) les coefficients de Lamé. Sa masse volumique est notée ρ.

Les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont libres d'effort et on note g la constante de la pesanteur. On met le massif Δ en rotation dans R_0, autour de son axe, à une vitesse angulaire ω constante.





Champs de vitesse et d'accélération des particules du domaine Ω par rapport au repère R_0

1.1. Donner l'expression du vecteur rotation du repère R_c par rapport au repère R_0.

1.2. Pour une particule du domaine Ω, donner l'expression de son vecteur vitesse par rapport à R_0 en fonction de celle par rapport à R_c (rappel : la vitesse de rotation du massif Δ est constante et égale à ω).

1.3. Pour une particule du domaine Ω, donner l'expression de son vecteur accélération par rapport à R_0 en fonction de celle par rapport à R_c (rappel : la vitesse de rotation du massif Δ est constante et égale à ω).

Equation d'équilibre local

Après un certain temps après la mise en rotation de Δ, le cylindre Ω est en repos relatif par rapport au massif Δ.

2.1. Donner l'expression du vecteur accélération d'une particule de Ω par rapport à R_0.

2.2. Exprimer dans le repère R_c, l'équation d'équilibre local par rapport au repère R_0 du domaine Ω.

2.3. En déduire, dans le repère R_c, l'équation d'équilibre local par rapport au repère R_c du domaine Ω.

Ecriture du problème

On suppose toujours être dans le cas où après un certain temps après la mise en rotation de Δ, le cylindre Ω est en repos relatif par rapport au massif Δ.

3.1. Justifier le fait que dans le repère R_c on puisse faire l'hypothèse des petites perturbations. On se placera dans ce cadre pour toute la suite du problème.

3.2. Ecrire les équations du problème par rapport au repère R_c nécessaires à la recherche du tenseur des contraintes et du déplacement en tout point du domaine Ω.

3.3. Discuter l'existence et l'unicité des solutions du problème.

FORMULAIRE

Divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux dans le repère cylindrique

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\sigma_{r3}}{\partial x_3} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\sigma_{\varphi3}}{\partial x_3} + \dfrac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \\ \dfrac{\partial\sigma_{r3}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\varphi3}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + \dfrac{\sigma_{r3}}{r} \end{pmatrix}$$

Loi de Hooke

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\sigma)\,I \Leftrightarrow \sigma = \lambda\,\mathrm{tr}\{\varepsilon(\vec{u})\}\,I + 2\mu\,\varepsilon(\vec{u})$$