Méca milieu cont 1   L3 SPI MECA

TUBE SOUS PRESSION INTERNE SANS EFFET DE FOND

Soit un repère cartésien orthonormé $R = (O_0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ où $x = (x_i)_{i\,=\,1,\,2,\,3}$ est la position d'un point M. On considère un tube cylindrique Ω d'axe x_3. Les surfaces latérales intérieure $\Sigma_2{}^i$ et extérieure $\Sigma_2{}^e$ ont une section circulaire de rayon respectif a et b. Ce tube est limité en hauteur par Σ_0 située à $x_3 = 0$ et par Σ_1 située à $x_3 = l$. On note O le centre d'inertie de la section courante Σ, O_0 et O_1 les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 et le repère R est principal d'inertie.

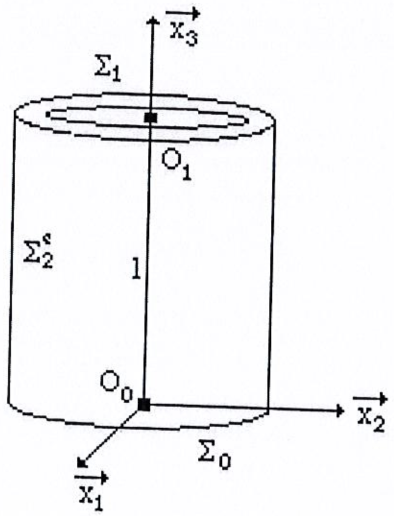
En tout point M de Σ, on définit le repère local des coordonnées cylindriques $(r, \varphi, x_k = x_3)$ par :

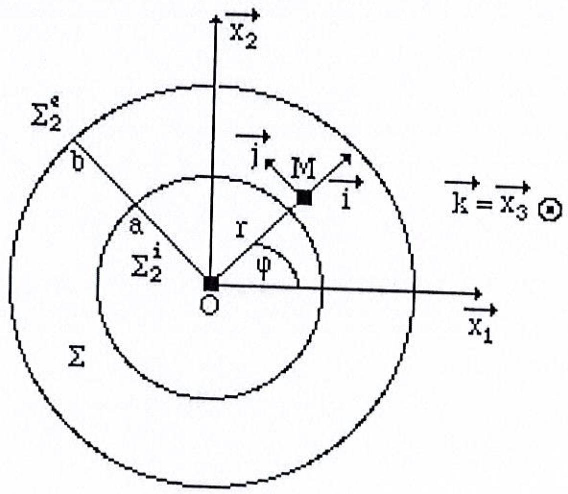
$$R_c = (O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \overrightarrow{x_3}) \text{ avec } r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi\, \overrightarrow{x_1} + \sin\varphi\, \overrightarrow{x_2} \\ \vec{j} = -\sin\varphi\, \overrightarrow{x_1} + \cos\varphi\, \overrightarrow{x_2} \end{cases}$$

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

On suppose que le domaine est en équilibre quasi-statique sous les conditions suivantes :

- les forces de volume sont négligées ;
- la surface $\Sigma_2{}^i$ est soumise à la pression interne p_i ;
- la surface $\Sigma_2{}^e$ est soumise à la pression externe p_e ;
- les faces Σ_0 et Σ_1 sont libres d'effort.





A - <u>Cas d'un matériau inhomogène anisotrope</u>

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire inhomogène anisotrope.

1. Montrer que le tube est globalement en équilibre.
2. Ecrire les équations à résoudre (projetées dans le repère cylindrique) si l'on souhaite déterminer en tout point du cylindre le champ des contraintes et le champ des déplacements.
3. Le problème ainsi posé rentre-t-il dans le cadre des problèmes généraux d'élasticité ? Discuter l'existence et l'unicité des solutions.

B - <u>Cas d'un matériau homogène isotrope</u>

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope.

1. On s'attend à ce que le champ de déplacement soit le suivant :

$$\vec{u}(M) = u_r(r)\,\vec{i} + u_k(x_3)\,\vec{k}$$

Justifier ce choix.

2. En déduire le champ des déformations puis celui des contraintes
3. Le champ de déplacement intuité est-il solution du problème ? Celui des contraintes ?

FORMULAIRE (sans sommation sur les indices muets)

Composantes du tenseur des contraintes et des déformations dans le repère cylindrique

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rk} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi k} \\ \sigma_{rk} & \sigma_{\varphi k} & \sigma_{kk} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rk} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi k} \\ \varepsilon_{rk} & \varepsilon_{\varphi k} & \varepsilon_{kk} \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right)$, $\varepsilon_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r}\right)$

$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$, $\varepsilon_{\varphi k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_k}\right)$, $\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$

- Divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux dans le repère cylindrique

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}\, \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_k} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi k}}{\partial x_k} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi k}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_k} + \frac{\sigma_{rk}}{r} \end{pmatrix}$$

- Equations de Navier (pour un matériau élastique linéaire isotrope)

$$(\lambda + \mu)\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\{\operatorname{div}(\vec{u})\} + \mu\, \Delta\vec{u} + \rho\vec{f} = \rho\vec{\gamma}$$

$$(\lambda + 2\mu)\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\{\operatorname{div}(\vec{u})\} - \mu\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{u})\} + \rho\vec{f} = \rho\vec{\gamma}$$

- Loi de Hooke

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\sigma)\, I \Leftrightarrow \sigma = \lambda\, \mathrm{tr}\{\varepsilon(\vec{u})\}\, I + 2\mu\, \varepsilon(\vec{u})$$

- Gradient d'une fonction scalaire

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

- Gradient d'un vecteur

$$\operatorname{grad} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_1}{r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_k}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

- Divergence d'un vecteur

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

- Divergence d'un tenseur du second ordre

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\, t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{rk}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{rr} - t_{\varphi\varphi}}{r} \\ \dfrac{\partial t_{\varphi r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{\varphi k}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{r\varphi} + t_{\varphi r}}{r} \\ \dfrac{\partial t_{kr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{k\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{kk}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{kr}}{r} \end{pmatrix}$$

- Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

- Laplacien d'un vecteur

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \dfrac{v_r}{r^2} \\ \Delta v_\varphi + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r^2} \\ \Delta v_k \end{pmatrix}$$

- Rotationnel d'un vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\, v_k)}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_k}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (r\, v_\varphi)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right\} \end{pmatrix}$$

- Solution d'équations différentielles simples (C_0 et C_1 sont des constantes)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} = K \Rightarrow x(t) = \frac{K}{2}t^2 \ln t + t^2\left(C_1 - \frac{K}{4}\right) + C_0$$

$$A\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\,t = K \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{6}\frac{B\,t^3}{A} + \frac{1}{2}\frac{K\,t^2}{A} + C_1\,t + C_0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{x(t)}{t^2} + K\,t = 0 \Rightarrow x(t) = -\frac{K}{8}t^3 + C_0\,t + \frac{C_1}{t}$$

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - t\,\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = C_1\,t\ln t + C_0 t$$

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\,\frac{dx(t)}{dt} - P\,x(t) + Q\,t = 0,\ P > 0 \Rightarrow \begin{cases} * \text{ Si } P \neq 1 : x(t) = C_0\, t^{\sqrt{P}} + C_1\, t^{-\sqrt{P}} - \dfrac{Q}{1-P}\,t \\ * \text{ Si } P = 1 : x(t) = C_0\,t + \dfrac{C_1}{t} - \dfrac{Q}{4}\,t\,(2\ln t - 1) \end{cases}$$