Méca générale

DISQUE ET CERCEAU

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère deux systèmes mécaniques rigides S_1 et S_2 en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur défini par : $\vec{g} = -g\,\vec{y}$.

Le système rigide S_1 est un demi cerceau homogène de rayon r_1 dont $R_1 = (O_1, \vec{I_1}, \vec{J_1}, \vec{K_1})$ défini le repère lié orthonormé. Le point géométrique O_1 pris comme appartenant au prolongement de S_1 est situé au milieu du diamètre. Le vecteur $\vec{I_1}$ indique une direction du diamètre et avec le vecteur $\vec{J_1}$ qui lui est orthogonal et pointant vers l'extérieur du demi-cerceau, il définit une base du plan de S_1. Le vecteur $\vec{K_1}$ est donc perpendiculaire à ce plan. La masse de S_1 est notée m_1, la fonction de répartition de masse étant ρ_s. Enfin, on note G_1 son centre de masse. On donne :

$$\overrightarrow{O_1G_1} = -\frac{2\,r_1}{\pi}\vec{J_1}$$

On donne également sa matrice d'inertie en G_1, dans son repère lié :

$$\left[J_{G_1}(S_1)\right]^{R_1} = m_1\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

Le système rigide S_2 est un disque homogène de rayon r_2 ($r_1 > r_2$) dont $R_2 = (O_2, \vec{I_2}, \vec{J_2}, \vec{K_2})$ défini le repère lié orthonormé. Le point géométrique O_2 défini le centre de masse de S_2 et les vecteurs $(\vec{I_2}, \vec{J_2})$ forment une base du plan de S_2. Le vecteur $\vec{K_2}$ est donc perpendiculaire à ce plan. La masse de S_2 est notée m_2, la fonction de répartition de masse étant ρ_s. On donne sa matrice d'inertie en O_2, dans son repère lié :

$$\left[J_{O_2}(S_2)\right]^{R_2} = m_2\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Le demi-cerceau est posé sur le plan horizontal $(\vec{x}, \vec{z})$ de telle sorte que son plan soit contenu dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, sa concavité étant tournée vers le vecteur $\vec{y}$. Le point de contact géométrique entre $(\vec{x}, \vec{z})$ et S_1 est noté M. On suppose qu'au cours du mouvement :

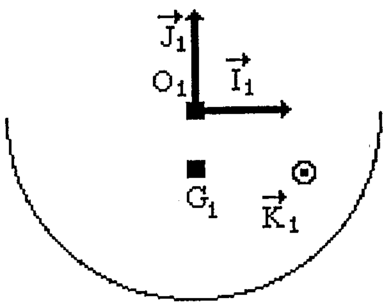
- le plan de S_1 reste dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$;

- le contact entre $(\vec{x}, \vec{z})$ et S_1 se produit avec roulement sans glissement.

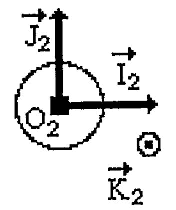
A tout instant donc, le vecteur $\overrightarrow{K_1}$ est confondu avec le vecteur $\vec{z}$. On définit l'angle φ_1 par : $\varphi_1 = (\widehat{\vec{x}, \vec{I_1}})$. La position du point M est repérée par la variable x telle que : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x}$.

Le disque S_2 est placé à l'intérieur et au contact de S_1 de telle sorte que les plans des deux systèmes soient confondus tout au long du mouvement. A tout instant donc, le vecteur $\overrightarrow{K_2}$ est confondu avec le vecteur $\vec{z}$. On définit l'angle φ_2 par : $\varphi_2 = (\widehat{\vec{x}, \vec{I_2}})$. Le point de contact géométrique entre S_1 et S_2 est noté N. On suppose que ce contact se produit avec roulement sans glissement. On définit le vecteur $\vec{i}$ par $\overrightarrow{O_1O_2} = (r_1 - r_2)\,\vec{i}$, le repère orthonormé R' par $R' = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ et enfin l'angle φ par $\varphi = (\vec{i}, \vec{x})$.

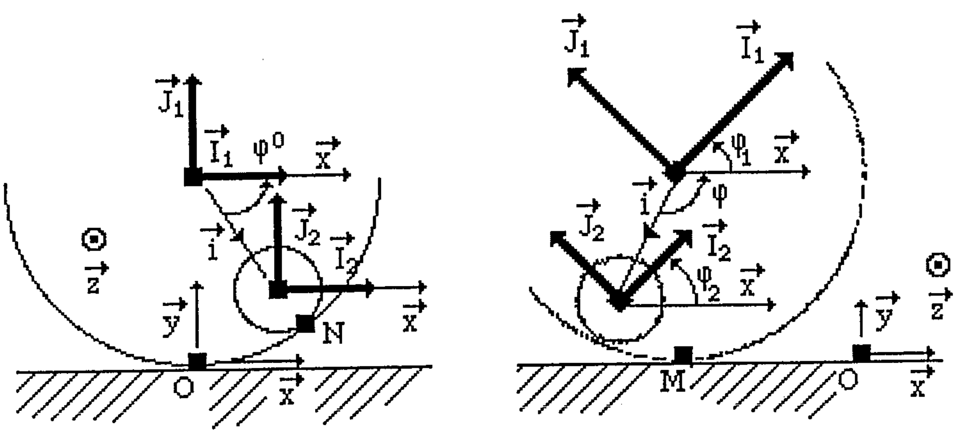
Le disque S_2 est abandonné, à l'instant initial $t_0 = 0$, sans vitesse sur S_1 à partir de la position définie par les angles $\varphi_2(t_0) = 0$ et $\varphi(t_0) = \varphi_0$. A ce même instant, S_1 est immobile et dans la position définie par l'angle $\varphi_1(t_0) = 0$ et par $x(t_0) = 0$.



Le système S_1 dans son repère lié



Le système S_2 dans son repère lié



Instant initial *Instant t*

Le mécanisme en mouvement

1. CINéMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en M_1 (point matériel de S_1 au lieu du contact entre le plan et S_1) du torseur cinématique de S_1 par rapport à R.
1.2. En déduire l'expression des éléments de réduction en O_1 et G_1 du torseur cinématique de S_1 par rapport à R, ainsi qu'en N_1 (point matériel de S_1 au lieu du contact entre S_1 et S_2).
1.3. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point G_1.
1.4. Donner l'expression des éléments de réduction en N_2 (point matériel de S_2 au lieu du contact entre S_1 et S_2) du torseur cinématique de S_2 par rapport à R.
1.5. En déduire l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur cinématique de S_2 par rapport à R.
1.6. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point O_2.

2. CINéTIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique de S_1 par rapport à R.
2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en O_1 du torseur dynamique de S_1 par rapport à R.
2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur cinétique de S_2 par rapport à R.
2.4. Donner l'expression des éléments de réduction en O_1 du torseur dynamique de S_2 par rapport à R.

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

3.1. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction des actions agissant sur S_1.
3.2. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction des actions agissant sur S_2.
3.3. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_1 en O_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_2 en O_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
3.5. En supposant que les équations du mouvement sont résolues, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont connues, montrer que l'on peut donner l'expression des éléments de réduction de tous les torseurs des actions mécaniques agissant sur S_1 et agissant sur S_2.